Rechenmethoden der Physik

Vorlesungsskript

Prof. Dr. Gernot Akemann

Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

Inhaltsverzeichnis

0 Inhaltsübersicht

0.1 Literatur: einige Standardwerke

- S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (10. Aufl.), Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2012.
- H. Schulz, *Physik mit Bleistift* (6. Aufl.), Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2006.
- C.B. Lang und N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik* (2. Aufl.), Spektrum Akad. Verl., Heidelberg, 2005.
- I.N. Bronstein und K.A. Semendjaev, *Taschenbuch der Mathematik* (8. Aufl.), Verlag Harri Deutsch, 2012.
- G. Fischer, *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger* (18. Aufl.), Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 2014.

$\rightarrow$ Semesterapparat

0.2 Übersicht

1. Lineare Algebra
2. Analysis in 1 Dimension
3. Analysis in ≥ 1 Dimension
4. Fourier-Transformation

1 Lineare Algebra

Lit.: Gerd Fischer, *Lineare Algebra*

1.1 Vektoren und Skalare

Gruppe G: Menge G mit Verknüpfung $+ : \; G \times G \to G$

G 0 abgeschlossen $\forall\, a, b \in G$: $a + b \in G$

G 1 + assoziativ $(a + b) + c = a + (b + c)$

G 2 $\exists$ neutrales Element e: $\forall a \in G$: $e + a = a$

G 3 $\exists$ inverses a': $\forall a$: $a' + a = e$

G ist abelsch, wenn $\forall a, b$: $a + b = b + a$

Körper K: Menge K mit 2 Verknüpfungen $(K, +, \,\cdot\,)$

K 1 $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe, $e = 0$, $a' = -a$

K 2 $K^* \equiv K \setminus \{0\}$ ist eine Untergruppe: $K^* \subset K$ bzgl. $\cdot$
und $(K^*, \cdot)$ ist abelsch, neutr. Element $\equiv 1$, $a' = a^{-1}$

K 3 Distributivgesetze
$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) \; &= a \cdot b + a \cdot c \,, \\ \Rightarrow (a + b) \cdot c \; &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

Beispiele:
$K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ mit üblicher Addition und Multiplikation. Es gilt:

$$\begin{aligned} & e, a' \text{sind eindeutig} \,, \\ & \forall\, a \in K : a \cdot 0 = 0 \,, \\ & \forall\, a, b \in K : a \cdot b = 0 \;\Rightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0 \,. \end{aligned}$$

Vektorraum über K (K-Vektorraum): K Körper, V Menge mit 2 Verknüpfungen $+, \cdot$;

+ Addition $V \times V \to V$: $\vec{v}, \vec{w} \in V \to \vec{v} + \vec{w} \in V$

· Multiplikation mit Element aus dem Körper $K \times V \to V$: $a \in K$, $\vec{v} \in V \to a \cdot \vec{v} \in V$ mit:

V 1 $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe, mit $e \equiv \vec{0}$ Nullvektor und inversem Element $-\vec{v}$ zu $\vec{v}$, so dass $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

V 2 Distributivgesetze:

$$
\begin{aligned}
(a+b) \cdot \vec{v} &= a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}\,, \\
a(b \cdot \vec{v}) &= (ab) \cdot \vec{v}\,, \\
a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}\,, \\
\text{und } 1 \cdot \vec{v} &= \vec{v}\,, \text{ wobei } 1 \in K\,.
\end{aligned}
$$

Die Elemente von K heißen Skalare (z. B. m, T, ...), die von V Vektoren und werden mit $\vec{\ }$ gekennzeichnet (z. B. Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, Impuls $m \cdot \vec{v} = \vec{p}$, Drehimpuls $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$, ...)

Beispiel:
$K = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $\underset{\text{oder } V = \text{Polynome}}{V = \mathbb{R}^n}$, $\vec{v}$ n-Tupel in $\mathbb{R}^n$.

- Um zu einer expliziten Darstellung von Vektoren zu gelangen (u. a. um mit ihnen konkret zu rechnen) müssen wir eine Basis einführen
- Vektorenaddition u. skalare Multiplikation iteriert: (Geometrische Bedeutung → Ü)

Linearkombination: $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i \in V$
die Vektoren $\vec{v}_1$, ...,$\vec{v}_k \neq \vec{0}$ sind linear unabhängig falls gilt

$$
\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \forall\, i = 1, ..., k: \;\; a_i = 0\,, \tag{1.1}
$$

gibt es eine Lösung für (1.1) mit mind. einem $a_j \neq 0$, so sind die Vektoren linear abhängig:
$\vec{v}_j = -\frac{1}{a_j} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} a_i \vec{v}_i\,.$

Basis (Fundamentalsystem):
Die Menge von Vektoren $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ bildet eine Basis von V falls

B 1 sie sind linear unabhängig,

B 2 sie spannen V auf: $V = \text{span}\,(\vec{e}_i)_{i=1,\ldots,n}$: $\forall \vec{v} \in V\ \exists v_1, ..., v_n \in K$ mit $\vec{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$.

Dann ist die Dimension $\text{dim}V = n$

- eine Wahl der Basis ist nicht eindeutig, z. B. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ Basis von $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2\}$ ist auch eine Basis

- nach Wahl einer Basis sind die Komponenten v_i eines Vektors $\vec{v}$ bzg. dieser Basis eindeutig!
  Dann

$$\begin{aligned} &\exists\, v_1, ..., v_n; w_1, ..., w_n \text{ mit} \\ &\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{e}_i \\ \Rightarrow &\vec{0} = \vec{v} - \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} (v_i - w_i)\, \vec{e}_i, \vec{e}_i \text{ linear unabh. } \Rightarrow \forall_{i=1,\ldots,n}\,, v_i = w_i\,. \end{aligned}$$

Beispiele:
$\mathbb{R}^3$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, Basis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$;
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 3-Tupel mit kanonischer Basis $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ und Addition komonentenweise (sowie Multiplikation)

- die Menge der Polynome mit maximalen Grad n ist ein $(n + 1)$-dim. Vektorraum

- Phasenraum eines Teilchens in der klass. Mechanik $\mathbb{R}^6 \ni \{x, y, z, p_x, p_y, p_z\}$
  $\rightarrow$ höhere Dim. für mehr Teilchen

Skalarprodukt: die Multiplikation von $\begin{array}{cc} \vec{v}, \vec{w} \in V & V \times V \rightarrow K \\ \text{Abb. in K} & (\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} \in K \end{array}$
(inneresProdukt)
heißt Skalarprodukt falls gilt:

- $(\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{w}$ abelsch; es gibt auch nicht abelsch: $K = \mathbb{C}$: $\vec{v}^* \cdot \vec{w})$,

- $\vec{v}\,(a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2) = a_1 \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + a_2 \vec{v} \cdot \vec{w}_2$ linear,

- $\left.\begin{array}{ll} |\vec{v}|^2 \equiv \vec{v} \cdot \vec{v} & \geq 0 \\ |\vec{v}|^2 = 0 & \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \end{array}\right\}$ positiv definit, $|\vec{v}|$ ist die **Norm** ("Länge") von $\vec{v}$, es gilt **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:**

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}||\vec{w}| \,. \tag{1.2}$$

(Denn $0 \leq |\lambda\vec{v} + \vec{w}|^2$,
oBdA $\vec{v} \neq \vec{0}$, wähle $\lambda = -\vec{v} \cdot \vec{w}/|\vec{v}|^2$ u. Gl. $\cdot|\vec{v}|^2$
$\Rightarrow 0 \leq -\left(\vec{v} \cdot \vec{w}\right)^2 + |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2$.)

Dreiecksungleichung:

$$|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}| \,. \tag{1.3}$$

(Denn $|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + 2\,\vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{w}|^2 \leq |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v} \cdot \vec{w}| + |\vec{w}|^2 \leq \left(|\vec{v}| + |\vec{w}|\right)^2$,
oder geom. Beweis für $\mathbb{R}^2$.)

- 2 Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in V$ heißen **orthogonal** falls $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
  Wir definieren einen **Winkel** θ zwischen 2 Vektoren:

$$\text{für } \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}: \ \cos\theta := \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} \,, \tag{1.4}$$

  wegen Cauchy-Schwarz (1.2) gilt $|\cos\theta| \leq 1$.

- insbesondere haben wir für $\theta = \pi/2$: $\vec{v} \perp \vec{w}$ Orthogonalität.

Orthonormale (ON) Basis: gegeben eine Basis $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ von V, gilt

$$\forall_{i,j=1,\ldots,n} \text{ mit } i \neq j : \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \,, \text{so ist diese } \underline{\text{orthogonal}}. \tag{1.5}$$

Ist zusätzlich $\forall_{i=1,\ldots,n}\ |\vec{e}_i| = 1$ ist sie <u>orthonormal</u>.
(Können wir immer durch Normierung erzielen $\vec{e}_i \to \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}$, da $\forall_i\ \vec{e}_i \neq \vec{0}$ (lin. unabh.!).)

- aus einer beliebigen Basis $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ kann immer eine orthn. Basis rekursiv konstruiert werden: **Gram-Schmidt Verfahren**:

$$
\begin{aligned}
\vec{b}_1 &:= \vec{a}_1 \,, \\
\vec{b}_2 &:= \vec{a}_2 - \frac{\left(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1\right)}{|\vec{b}_1|^2}\vec{b}_1 \,, \\
&\vdots \\
\vec{b}_k &:= \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\left(\vec{a}_k \cdot \vec{b}_i\right)}{|\vec{b}_i|^2}\vec{b}_i
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

mit $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0$ für $i \neq j$, dann $\vec{e}_j = \vec{b}_j / |\vec{b}_j|$ ist ON Basis.

- In einer ON Basis gilt:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \vec{e}_j\right) &= \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \\
&= v_i w_i \text{ (Einsteinsche Summenkonvention über gleiche Indizes)},
\end{aligned}
$$

wegen

$$
\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, \; i = j \\ 0\,, \; i \neq j \end{cases} \quad \textbf{Kronecker Delta}\,. \tag{1.7}
$$

- bisher hatten wir $\begin{array}{ll} \text{skalare Mult.} & K \times V \to V : \; a \cdot \vec{v} \\ \text{Skalarprodukt} & V \times V \to K : \; \vec{v} \cdot \vec{w} \end{array}$.

  Gibt es weitere Multiplikationen, die wieder in V führen?

  <u>Ja!</u>: $\begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 \text{ "="} \; \mathbb{C} & : \; z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C} \text{ Mult. komplexer Zahlen } z = \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \; \to \; \text{Ü} \\ \mathbb{R}^3 & : \text{Vektorprodukt} \end{array}$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt o. äußeres Produkt) auf $\underline{V = \mathbb{R}^3}$

$$
\text{"}\times\text{"}: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.8}
$$

mit folgenden Eigenschaften:

- $\begin{array}{rrl} \underline{\text{antisymmetrisch}}: & \vec{u} \times \vec{v} = & -\vec{v} \times \vec{u} \quad \left(\Rightarrow \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}\right) \,, \\ \underline{\text{linear}}: & \vec{u} \times (a\vec{v} + b\vec{w}) = & a\,(\vec{u} \times \vec{v}) + b\,(\vec{u} \times \vec{w}) \;. \end{array}$

- Wenn wir "×" auf einer ON Basis defeinieren, ist es für alle Vektoren auf $\mathbb{R}^3$ definiert:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{e}_1 & \times & \vec{e}_2 & = & \vec{e}_3 \\ {\scriptstyle 2} & & {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 2} \end{array} \quad \text{zyklisch}\,.$$

→ Figur 1 (Rechtshändige ON Basis)

In einer <u>rechtshändigen ON Basis</u> gilt:

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) &= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \times (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) \\ &\overset{\text{linear}}{=} (u_1v_2 - u_2v_1)\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{=\vec{e}_3} + (u_2v_3 - u_3v_2)\underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{=\vec{e}_1} + (u_3v_1 - u_1v_3)\underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{=\vec{e}_2} \\ &= \underline{(u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{e}_3}\,, \\ \leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v})_i &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} u_j v_k\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Total anti-sym. Epsilon-Tensor (3. Stufe: 3 Indizes)

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{, wenn je 2 (oder mehr) Indizes gleich} \\ +1 & \text{, wenn } ijk \text{ zyklische Permutationen von } \{1,2,3\} \\ -1 & \text{, wenn } ijk \text{ nicht zyklische Permutationen von } \{1,2,3\} \end{cases} \tag{1.10}$$

3 Indizes ⇒ 3! = 6 Permutationen:

+	-
ϵ_{123}	ϵ_{132}
231	321
312	213

Vorzeichen ändert sich nicht bei zyklischer Vertauschung. Skalarprodukt und Vektorprodukt spielen eine wichtige Rolle in der Elektrodynamik, mit Ableitungen als Komponenten.

(geometrische) **Eigenschaften des Vektorprodukts**:

- $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$,
- $0 \overset{!}{=} \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1)$
  sowie $0 = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ (denn $\vec{u} \to \vec{v}$, $\vec{v} \to \vec{u}$ oben, antisym.) (falls $\neq 0$!)
  ⇒ $(\vec{u} \times \vec{v})$ ist <u>senkrecht</u> zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$, d. h. zur von $\vec{u}$ u. $\vec{v}$ <u>aufgespannten Ebene</u> (rechtshändig),

  → Figur 2 (Normale und Winkel von/zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$.)

- Flächenbestimmung:

$$\begin{aligned}
|\vec{u}\times\vec{v}|^2 &= (u_1v_2-u_2v_1)^2+(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2\\
&= \ldots = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\left(1-\cos^2\theta\right)\ ,\\
\Rightarrow |\vec{u}\times\vec{v}| &= |\vec{u}||\vec{v}|\sqrt{1-\cos^2\theta} = |\vec{u}||\vec{v}||\sin\theta|
\end{aligned} \tag{1.11}$$

= Fläche des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms.

→ Figur 3 (Parallelogramm $\vec{u}$, $\vec{v}$, θ.)

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x+\vec{e}_y) && \Rightarrow |\vec{u}|^2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1\\
\vec{v} &= \vec{e}_z && \Rightarrow |\vec{v}|^2 = 1\\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= 0 && \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \Rightarrow \text{spannen Einheitsquadrat auf}\\
\vec{u}\times\vec{v} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x+\vec{e}_y)\times\vec{e}_z = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_y+\vec{e}_x) && |\cdot\vec{u}=0\\
& && |\cdot\vec{v}=0\\
|\vec{u}\times\vec{v}|^2 &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} = 1 && \text{Fläche} = 1
\end{aligned}$$

Außerdem gilt, dass diese $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ eine neue ON Basis bilden.

- $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$, wenn:

$$\begin{aligned}
&\vec{u}\parallel\vec{v}\\
&\Rightarrow \vec{v} = |\vec{v}|\,(\pm1)\,\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\\
&\Rightarrow (\vec{u}\times\vec{v})_i = \sum_{j,k}\underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\text{anti}-}\underbrace{u_ju_k}_{sym.}(\pm1)\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}
\end{aligned}$$

(oder mit: $\theta = 0,\ \pi$)

Kombinationen von $\left\{\begin{array}{l}\text{Skalarprodukt und Vektorprodukt ?}\\ \text{Vektorprodukt und Vektorprodukt ?}\end{array}\right.$

Spatprodukt: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \qquad V \times V \times V \to K$

- <u>Zyklizytät</u> $\quad \overset{1)}{=} \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) \quad \overset{2)}{=} \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ denn:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j,k}^{n} \epsilon_{ijk} v_j w_k$$

Idee: $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$, endliche Summen können immer umgeordnet werden

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{k,i}^{n} \epsilon_{jki} w_k u_i \qquad 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k \sum_{i,j}^{n} \epsilon_{kij} u_i v_j \qquad 2)$$

(Später: schreibe Spatprodukt mit Determinante)

- es gibt weitere Identitäten bei anti-zyklischer Vertauschung von $(\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{w} \times \vec{v})$
- "<u>Vertauschbarkeit</u>" $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \overset{!}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$,
  denn: 2) oben, Skalarprodukt ist kommut. $= \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
- <u>Volumenbestimmung</u>
  Volumen = Fläche $\times$ Höhe
  Höhe = $\cos\theta \cdot |\vec{u}|$ $\qquad \to$ Figur 4, Parallelepiped (= Spat)
  $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = \cos\theta |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}|$
- das von $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ aufgespannte Spatvolumen ist $\neq 0$
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sind linear unabhängig
  (denn alle wechselseitigen Kreuzprodukte müssen $\neq 0$ sein)

Weitere Eigenschaften des Vektor- und Skalarproduktes:

- <u>Graßmann-Identität</u>

$$\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w} \qquad (1.12)$$

(Beweis $\to$ Übung)

- Lagrange-Identität

$$(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 \times \vec{v}_1) \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{v}_2) - (\vec{u}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{v}_1) \tag{1.13}$$

  (Beweis $\rightarrow$ Übung)

- Jacobi-Identität

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0} \tag{1.14}$$

  (Beweis $\rightarrow$ Übung)

- Aus der Jacobi-Identität folgt, dass das Vektorprodukt i.A. nicht zyklisch ist
  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$, d.h. Klammern sind wichtig!
  Im Gegensatz dazu hatten wir $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

* Wir kommen später auf diese Formeln zurück in der Differential- und Integralrechnung in 3 Dimensionen.

* weitere Multiplikationen von Vektoren die $V \rightarrow V$ abbilden (in bel. Dim.):
lineare Abbildungen und Matrixmultiplikation

1.2 Matrizen

lineare Abbildung $M : \begin{array}{l} V \rightarrow V \\ \vec{v} \rightarrow \vec{w} = M(\vec{v}) \end{array}$ auf K-Vektorraum V, wenn gilt

$L\ 1$ $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V: \quad M(\vec{v} + \vec{w}) = M(\vec{v}) + M(\vec{w})\,,$

$L\ 2$ $\forall\, \vec{v} \in V, \forall a \in K: \quad M(a \cdot \vec{v}) = a \cdot M(\vec{v})\,.$

Darstellung der linearen Abbildung: Matrix

- wähle ON Basis $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\ldots,n}$, so dass $\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_j = v_j \vec{e}_j$
  $\Rightarrow\ \vec{w} = \sum_{k=1}^{n} w_k \vec{e}_k = M(\vec{v}) \stackrel{L\,1,\,2}{=} \sum_{j=1}^{n} v_j M(\vec{e}_j) \qquad |\vec{e}_i \cdot\,, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$
  $\Rightarrow\ w_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_i M(\vec{e}_j) = M_{ij} v_j$, wobei $\vec{e}_i M(\vec{e}_j) \equiv M_{ij} \in K$, damit Resultat in K und M_{ij} Darstellung von M in Basis $\{\vec{e}_i\}$.

Beispiele:

– lineares Gleichungssystem: $\vec{w}$, M gegeben:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}v_1 + \ldots + M_{1n}v_n \\ \vdots \\ M_{i1}v_1 + \ldots + M_{in}v_n \\ \vdots \\ M_{n1}v_1 + \ldots + M_{nn}v_n \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots & M_{1j} & \ldots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i1} & \vdots & \ddots & M_{ij} & \ddots & M_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & M_{nj} & \ldots & M_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{M}_1 \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{M}_i \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{M}_n \cdot \vec{v} \end{pmatrix} ,$$

wobei $\vec{M}_i$ der i-te Zeilenvektor ist.

– Nullmatrix: $0_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$,

– Einheitsmatrix: $\mathbb{1}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $M_{ij} = \delta_{ij}$.

- Im Allgemeinen betrachten wir im folgenden nur quadratische Matrizen $M\,\square$.
- Rechteckige Matrizen (z.B. in der Finanzmathematik) $\left(\updownarrow \begin{array}{l} \text{Zeitreihen} \\ \text{Firmen} \end{array} \right)$

  Beispiele:

  –
  $$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \text{, also } M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 .$$

  –
  $$M \quad - \quad n \times m \;\text{ Matrix: } \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n .$$

- Transponierte Matrix: $\left(M^\top\right)_{ij} = M_{ji}$
  (definiert für quadratisches und rechteckiges $M \quad \Rightarrow MM^\top$ quadratisch)
  insbesondere für Vektoren:

$$\begin{aligned} \vec{v} \in V \text{ als } n \times 1 \text{ "Matrix": } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} & \text{ SpaltenVektor}\,, \\ v^\top = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} & \text{ Zeilenvektor}\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

- Skalarprodukt als Matrixprodukt:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w_i = \left(v_1, \dots, v_n\right) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v^\top w \qquad \text{Abbildung von } \mathbb{R}^n \to \underset{=K}{\mathbb{R}^1}\,.$$

- Symmetrische Matrix: $\left(M^\top\right)_{ij} = M_{ji} = +M_{ij}$, z.B. $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,
  antisymmetrische Matrix: $\left(M^\top\right)_{ij} = M_{ji} = -M_{ij}$, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.
- Operationen von Matrizen: M, N: $V \to V$
  - elementweises Addieren $(M+N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ wichtig: gleiche Dimension
  - mit Skalaren Multiplizieren $(aM)_{ij} = aM_{ij}$
- Hintereinanderausführung: $\vec{v} = N\vec{u}$, $\vec{w} = M\vec{v}$:

$$\begin{array}{rlc} & & \text{ist assoziativ} \\ \Rightarrow \vec{w} = & M\left(N\vec{u}\right) \Rightarrow w_i = M_{ij}N_{jk}v_k & \text{A(BC)=(AB)C} \\ \text{aber i.A.} \neq & N\left(M\vec{u}\right) \quad \left(= N_{ij}M_{jk}u_k\right) & \text{und distributiv} \\ & & \text{A(B+C)=AB+AC} \end{array}$$

- Vertauschen von 2 Matrizen: Kommutator $[M, N] = MN - NM$
- Eigenschaften von "$\top$"
  * $\left(M^\top\right)^\top = M$
  * $(M+N)^\top = M^\top + N^\top$

* $(MN)^\top = N^\top M^\top \qquad \left(\text{denn } \begin{aligned} \left((MN)^\top\right)_{ij} &= M_{jk}N_{kj} = \left(N^\top\right)_{ik}(M)_{kj} \\ &= \left(N^\top M^\top\right)_{ij} \end{aligned}\right)$

  $\Rightarrow$ z.B. $MM^\top$ ist symmetrisch

- In der Quantenmechanik brauchen wir Matrizen mit $M_{ij} \in \mathbb{C}$
  $\rightarrow$ betrachte $K = \mathbb{C}$ Vektorraum, z.B. $V = \mathbb{C}^n$:
  - konjungierte Matrix $\quad (M^*)_{ij} = (M_{ij})^* \quad *$ komplexe Konjugation
  - adjungierte Matrix $\quad \left(M^\dagger\right)_{ij} = (M_{ij})^\dagger = \left(M^\top\right)^*_{ij} \quad \dagger$ Kreuz (engl.dagger)
  - selbstadjungierte oder hermitesche Matrix $\quad M^\dagger = M$
- wegen $(z^*)^* = z$ hat "$\dagger$" dieselben Eigenschaften wie "$\top$"
  (Notation Mathematik: oft $z^* \rightarrow \bar{z}$, $M^\dagger \rightarrow M^*$)

Beispiel:
die Pauli-Matrizen sind hermitesch:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Funktionen von Matrizen

- viele wichtige Funktionen in der Physik besitzen eine Taylorreihendarstellung, die auf ganz $\mathbb{R}$ (oder sogar $\mathbb{C}$) konvergiert
  Beispiele:
  * $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
  * $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, etc.
    $(e^{ix} = \cos x + i \sin x)$

  Damit definieren wir z.B. $\left(e^M\right)_{ij} \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (M^n)_{ij}$,
  wegen $AB \neq BA$ gilt aber i.A. $e^{AB} \neq e^{BA}$ (nicht kommutierende Matrizen)
  oder allgemeiner: $\quad F(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad \Rightarrow \quad F(M) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j M^j$.
- Insbesondere sind einfache Beispiele P_k Polynome vom Grad k:
  $a_j = 0 \quad \forall j > k: \quad P_2(M) = a\mathbb{1} + bM + cM^2$, wobei a, b und c Skalare $\in K$.

Das transponierte $M^\top$ einer Matrix M ist wichtig z.B. bei

Drehungen: lineare Abbildung (gegeben durch Matrixmultiplikation), die das Skalarprodukt invariant läßt (und damit insbesondere die $\underbrace{\text{Norm}}_{=\text{Länge}}$ aller Vektoren!):

$$\begin{aligned}
&\vec{x} \to \vec{x}' = O\,\vec{x} \quad (= Ox \text{ als Spaltenvektor) mit} \\
&\vec{x}\cdot\vec{y} \stackrel{!}{=} \vec{x}'\cdot\vec{y}' = (x')^\top\, y' = (O\,x)^\top\,(O\,y) = x^\top O^\top O\,y \stackrel{!}{=} x^\top y \\
&\Rightarrow O^\top O = \mathbb{1}\,.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Matrizen, deren inverse Matrix $O^{-1} = O^\top$, heißen <u>orthogonal</u>. Es gilt auch $O\,O^\top = \mathbb{1}$.
(O: <u>orthogonale Transformation</u>)

- für einen <u>$\mathbb{C}$-Vektorraum</u>, z.B. $\mathbb{C}^n$ läßt sich mit $\vec{u}\,,\quad \vec{v} \in \mathbb{C}^n$: $\vec{u}^*\cdot\vec{v}$ ein (nicht kommutatives) Skalarprodukt definieren, das eine positiv definite Norm hat.
  Dies wird durch folgende lineare Abbildung invariant gelassen:

$$\begin{aligned}
&\vec{u} \to \vec{u}' = U\vec{u}\,, \quad \vec{v} \to \vec{v}' = U\vec{v} \\
&\Rightarrow (\vec{u}')^*\cdot\vec{v}' = (Uu)^{\top *}\cdot Uv = u^{\top *}U^{\top *}Uv \stackrel{!}{=} u^{\top *}v \\
&\Rightarrow U^\dagger U = \mathbb{1}\,,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

  solche Matrizen heißen <u>unitär</u>. Es gilt auch $UU^\dagger = \mathbb{1}$.
  (U: <u>unitäre Transformation</u>)