

Rechenmethoden der Physik

Vorlesungsskript

Prof. Dr. Gernot Akemann

Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

Inhaltsverzeichnis

0	Inhaltsübersicht	5
0.1	Literatur: einige Standardwerke	5
0.2	Übersicht	5
1	Lineare Algebra	7
1.1	Vektoren und Skalare	7
1.2	Matrizen	15

Inhaltsverzeichnis

0 Inhaltsübersicht

0.1 Literatur: einige Standardwerke

- S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (10. Aufl.), Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2012.
- H. Schulz, *Physik mit Bleistift* (6. Aufl.), Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2006.
- C.B. Lang und N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik* (2. Aufl.), Spektrum Akad. Verl., Heidelberg, 2005.
- I.N. Bronstein und K.A. Semendjaev, *Taschenbuch der Mathematik* (8. Aufl.), Verlag Harri Deutsch, 2012.
- G. Fischer, *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger* (18. Aufl.), Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 2014.

→ Semesterapparat

0.2 Übersicht

1. Lineare Algebra
2. Analysis in 1 Dimension
3. Analysis in ≥ 1 Dimension
4. Fourier-Transformation

1 Lineare Algebra

Lit.: Gerd Fischer, *Lineare Algebra*

1.1 Vektoren und Skalare

Gruppe G : Menge G mit Verknüpfung $+$: $G \times G \rightarrow G$

G 0 abgeschlossen $\forall a, b \in G: a + b \in G$

G 1 + assoziativ $(a + b) + c = a + (b + c)$

G 2 \exists neutrales Element $e: \forall a \in G: e + a = a$

G 3 $\forall a: \exists$ inverses $a': a' + a = e$

G ist abelsch, wenn $\forall a, b: a + b = b + a$

Körper K : Menge K mit 2 Verknüpfungen $(K, +, \cdot)$

K 1 $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe, $e = 0, a' = -a$

K 2 $K^* \equiv K \setminus \{0\}$ ist eine Untergruppe: $K^* \subset K$ bzgl. \cdot
und (K^*, \cdot) ist abelsch, neutr. Element $\equiv 1, a' = a^{-1}$

K 3 Distributivgesetze
$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c, \\ \Rightarrow (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

Beispiele:

$K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ mit üblicher Addition und Multiplikation. Es gilt:

e, a' sind eindeutig,

$\forall a \in K: a \cdot 0 = 0,$

$\forall a, b \in K: a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0.$

1 Lineare Algebra

Vektorraum über K (K -Vektorraum): K Körper, V Menge mit 2 Verknüpfungen $+, \cdot$;

+ Addition $V \times V \rightarrow V: \vec{v}, \vec{w} \in V \rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in V$

· Multiplikation mit Element aus dem Körper $K \times V \rightarrow V: a \in K, \vec{v} \in V \rightarrow a \cdot \vec{v} \in V$
mit:

V 1 $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe, mit $e \equiv \vec{0}$ Nullvektor
und inversem Element $-\vec{v}$ zu \vec{v} , so dass $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

V 2 Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot \vec{v} &= a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}, \\ a(b \cdot \vec{v}) &= (ab) \cdot \vec{v}, \\ a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}, \\ \text{und } 1 \cdot \vec{v} &= \vec{v}, \text{ wobei } 1 \in K.\end{aligned}$$

Die Elemente von K heißen Skalare (z. B. m, T, \dots), die von V Vektoren und werden mit $\vec{}$ gekennzeichnet (z. B. Geschwindigkeit $\vec{r} = \vec{v}$, Impuls $m \cdot \vec{v} = \vec{p}$, Drehimpuls $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}, \dots$)

Beispiel:

$K = \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) und $V = \mathbb{R}^n$ oder $V = \text{Polynome}$, \vec{v} n -Tupel in \mathbb{R}^n .

- Um zu einer expliziten Darstellung von Vektoren zu gelangen (u. a. um mit ihnen konkret zu rechnen) müssen wir eine Basis einführen
- Vektorenaddition u. skalare Multiplikation iteriert: (Geometrische Bedeutung $\rightarrow \ddot{U}$)

Linearkombination: $\sum_{i=1}^k a_i \vec{v}_i \in V$

die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \neq \vec{0}$ sind linear unabhängig falls gilt

$$\sum_{i=1}^k a_i \vec{v}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, k : a_i = 0, \quad (1.1)$$

gibt es eine Lösung für (1.1) mit mind. einem $a_j \neq 0$, so sind die Vektoren linear abhängig:

$$\vec{v}_j = -\frac{1}{a_j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k a_i \vec{v}_i.$$

Basis (Fundamentalsystem):

Die Menge von Vektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ bildet eine Basis von V falls

B 1 sie sind linear unabhängig,

B 2 sie spannen V auf: $V = \text{span}(\vec{e}_i)_{i=1, \dots, n} : \forall \vec{v} \in V \exists v_1, \dots, v_n \in K$ mit $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i$.

Dann ist die Dimension $\dim V = n$

- eine Wahl der Basis ist nicht eindeutig, z. B. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ Basis von $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2\}$ ist auch eine Basis
- nach Wahl einer Basis sind die Komponenten v_i eines Vektors \vec{v} bzgl. dieser Basis eindeutig!
Dann

$$\begin{aligned} & \exists v_1, \dots, v_n; w_1, \dots, w_n \text{ mit} \\ & \vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n w_i \vec{e}_i \\ & \Rightarrow \vec{0} = \vec{v} - \vec{w} = \sum_{i=1}^n (v_i - w_i) \vec{e}_i, \vec{e}_i \text{ linear unabh.} \Rightarrow \forall_{i=1, \dots, n}, v_i = w_i. \end{aligned}$$

Beispiele:

\mathbb{R}^3 ist ein \mathbb{R} -Vektorraum, Basis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}, \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$;
 $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 3-Tupel mit kanonischer Basis $\vec{e}_x = (1, 0, 0), \vec{e}_y = (0, 1, 0), \vec{e}_z = (0, 0, 1)$ und Addition komponentenweise (sowie Multiplikation)

- die Menge der Polynome mit maximalen Grad n ist ein $(n + 1)$ -dim. Vektorraum
- Phasenraum eines Teilchens in der klass. Mechanik $\mathbb{R}^6 \ni \{x, y, z, p_x, p_y, p_z\}$
 \rightarrow höhere Dim. für mehr Teilchen

Skalarprodukt: die Multiplikation von $\vec{v}, \vec{w} \in V$ $V \times V \rightarrow K$
(inneres Produkt) Abb. in K $(\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} \in K$
heißt Skalarprodukt falls gilt:

- $(\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v})$ abelsch; es gibt auch nicht abelsch: $K = \mathbb{C}: \vec{v}^* \cdot \vec{w}$,
- $\vec{v} \cdot (a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2) = a_1 \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + a_2 \vec{v} \cdot \vec{w}_2$ linear,
- $\left. \begin{array}{l} |\vec{v}|^2 \equiv \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0 \\ |\vec{v}|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \end{array} \right\}$ positiv definit, $|\vec{v}|$ ist die **Norm** ("Länge") von \vec{v} ,

1 Lineare Algebra

es gilt **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**:

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}| |\vec{w}|. \quad (1.2)$$

(Denn $0 \leq |\lambda \vec{v} + \vec{w}|^2$,
oBdA $\vec{v} \neq \vec{0}$, wähle $\lambda = -\vec{v} \cdot \vec{w} / |\vec{v}|^2$ u. Gl. $\cdot |\vec{v}|^2$
 $\Rightarrow 0 \leq -(\vec{v} \cdot \vec{w})^2 + |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2$.)

Dreiecksungleichung:

$$|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|. \quad (1.3)$$

(Denn $|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{w}|^2 \leq |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v} \cdot \vec{w}| + |\vec{w}|^2 \leq (|\vec{v}| + |\vec{w}|)^2$,
oder geom. Beweis für \mathbb{R}^2 .)

- 2 Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in V$ heißen **orthogonal** falls $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
Wir definieren einen **Winkel** θ zwischen 2 Vektoren:

$$\text{für } \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}: \cos \theta := \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|}, \quad (1.4)$$

wegen Cauchy-Schwarz (1.2) gilt $|\cos \theta| \leq 1$.

- insbesondere haben wir für $\theta = \pi/2$: $\vec{v} \perp \vec{w}$ Orthogonalität.

Orthonormale (ON) Basis: gegeben eine Basis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ von V , gilt

$$\forall_{i,j=1,\dots,n} \text{ mit } i \neq j: \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \text{ so ist diese } \underline{\text{orthogonal}}. \quad (1.5)$$

Ist zusätzlich $\forall_{i=1,\dots,n} |\vec{e}_i| = 1$ ist sie orthonormal.

(Können wir immer durch Normierung erzielen $\vec{e}_i \rightarrow \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}$, da $\forall_i \vec{e}_i \neq \vec{0}$ (lin. unabh.!))

- aus einer beliebigen Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ kann immer eine orthn. Basis rekursiv konstruiert werden: **Gram-Schmidt Verfahren**:

$$\begin{aligned}
 \vec{b}_1 &:= \vec{a}_1, \\
 \vec{b}_2 &:= \vec{a}_2 - \frac{(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1)}{|\vec{b}_1|^2} \vec{b}_1, \\
 &\vdots \\
 \vec{b}_k &:= \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\vec{a}_k \cdot \vec{b}_i)}{|\vec{b}_i|^2} \vec{b}_i
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

mit $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0$ für $i \neq j$, dann $\vec{e}_j = \vec{b}_j / |\vec{b}_j|$ ist ON Basis.

- In einer ON Basis gilt:

$$\begin{aligned}
 \vec{v} \cdot \vec{w} &= \left(\sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n w_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^n v_i w_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^n v_i w_i \\
 &= v_i w_i \text{ (Einsteinsche Summenkonvention über gleiche Indizes),}
 \end{aligned}$$

wegen

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ **Kronecker Delta.** } \tag{1.7}$$

- bisher hatten wir

skalare Mult.	$K \times V \rightarrow V : a \cdot \vec{v}$
Skalarprodukt	$V \times V \rightarrow K : \vec{v} \cdot \vec{w}$

Gibt es weitere Multiplikationen, die wieder in V führen?

Ja!: $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} : z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$ Mult. komplexer Zahlen $z = \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \ddot{U}$
 $\mathbb{R}^3 : \text{Vektorprodukt}$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt o. äußeres Produkt) auf $V = \mathbb{R}^3$

$$\text{„}\times\text{“}: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.8}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- antisymmetrisch: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad (\Rightarrow \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0})$,
linear: $\vec{u} \times (a\vec{v} + b\vec{w}) = a(\vec{u} \times \vec{v}) + b(\vec{u} \times \vec{w})$.

1 Lineare Algebra

- Wenn wir "×" auf einer ON Basis definieren, ist es für alle Vektoren auf \mathbb{R}^3 definiert:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad \text{zyklisch.}$$

2	3	1	
3	1	2	

→ Figur 1 (Rechtshändige ON Basis)

In einer rechtshändigen ON Basis gilt:

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) &= (u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3) \times (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3) \\ &\stackrel{\text{linear}}{=} (u_1 v_2 - u_2 v_1) \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{=\vec{e}_3} + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{=\vec{e}_1} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{=\vec{e}_2} \\ &= \underline{(u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}_3}, \\ \Leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v})_i &= \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} u_j v_k. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Total anti-sym. Epsilon-Tensor (3. Stufe: 3 Indizes)

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & , \text{ wenn je 2 (oder mehr) Indizes gleich} \\ +1 & , \text{ wenn } ijk \text{ zyklische Permutationen von } \{1, 2, 3\} \\ -1 & , \text{ wenn } ijk \text{ nicht zyklische Permutationen von } \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (1.10)$$

3 Indizes $\Rightarrow 3! = 6$ Permutationen:

+	-
ϵ_{123}	ϵ_{132}
ϵ_{231}	ϵ_{321}
ϵ_{312}	ϵ_{213}

 Vorzeichen ändert sich nicht bei zyklischer Vertauschung. Skalarprodukt und Vektorprodukt spielen eine wichtige Rolle in der Elektrodynamik, mit Ableitungen als Komponenten.

(geometrische) **Eigenschaften des Vektorprodukts:**

- $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$,
- $0 \stackrel{!}{=} \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = u_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2 (u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1)$
sowie $0 = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ (denn $\vec{u} \rightarrow \vec{v}$, $\vec{v} \rightarrow \vec{u}$ oben, antisym.) (falls $\neq 0$!)
 $\Rightarrow (\vec{u} \times \vec{v})$ ist senkrecht zu \vec{u} und \vec{v} , d. h. zur von \vec{u} u. \vec{v} aufgespannten Ebene (rechtshändig),

→ Figur 2 (Normale und Winkel von/zwischen \vec{u} und \vec{v} .)

- Flächenbestimmung:

$$\begin{aligned}
 |\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= (u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 \\
 &= \dots = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta) , \\
 \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| &= |\vec{u}||\vec{v}|\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = |\vec{u}||\vec{v}|\sin \theta
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

= Fläche des von \vec{u} und \vec{v} aufgespannten Parallelogramms.

→ Figur 3 (Parallelogramm \vec{u} , \vec{v} , θ .)

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 \vec{u} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_y) & \Rightarrow |\vec{u}|^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \\
 \vec{v} &= \vec{e}_z & \Rightarrow |\vec{v}|^2 &= 1 \\
 \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 & \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} &\Rightarrow \text{spannen Einheits-} \\
 & & &\text{quadrat auf} \\
 \vec{u} \times \vec{v} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times \vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{e}_y + \vec{e}_x) & | \cdot \vec{u} &= 0 \\
 |\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 & | \cdot \vec{v} &= 0 \\
 & & \text{Fläche} &= 1
 \end{aligned}$$

Außerdem gilt, dass diese $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ eine neue ON Basis bilden.

- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, wenn:

$$\begin{aligned}
 \vec{u} &\parallel \vec{v} \\
 \Rightarrow \vec{v} &= |\vec{v}| (\pm 1) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \\
 \Rightarrow (\vec{u} \times \vec{v})_i &= \sum_{j,k} \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\text{anti-}} \underbrace{u_j u_k}_{\text{sym.}} (\pm 1) \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \\
 &\text{(oder mit: } \theta = 0, \pi)
 \end{aligned}$$

Kombinationen von $\left\{ \begin{array}{l} \text{Skalarprodukt und Vektorprodukt ?} \\ \text{Vektorprodukt und Vektorprodukt ?} \end{array} \right.$

1 Lineare Algebra

Spatprodukt: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \quad V \times V \times V \rightarrow K$

- Zyklizität $\stackrel{1)}{=} \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) \quad \stackrel{2)}{=} \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ denn:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} v_j w_k$$

Idee: $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$, endliche Summen können immer umgeordnet werden

$$= \sum_{j=1}^n v_j \sum_{k,i} \epsilon_{jki} w_k u_i \quad 1)$$

$$= \sum_{k=1}^n w_k \sum_{i,j} \epsilon_{kij} u_i v_j \quad 2)$$

(Später: schreibe Spatprodukt mit Determinante)

- es gibt weitere Identitäten bei anti-zyklischer Vertauschung von $(\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{w} \times \vec{v})$
- "Vertauschbarkeit" $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \stackrel{!}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$,
denn: 2) oben, Skalarprodukt ist kommut. $= \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
- Volumenbestimmung
Volumen = Fläche \times Höhe
Höhe = $\cos \theta \cdot |\vec{u}| \quad \rightarrow$ Figur 4, Parallelepiped (= Spat)
 $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = \cos \theta |\vec{u}| |\vec{v} \times \vec{w}|$
- das von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannte Spatvolumen ist $\neq 0$
 $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sind linear unabhängig
(denn alle wechselseitigen Kreuzprodukte müssen $\neq 0$ sein)

Weitere Eigenschaften des Vektor- und Skalarproduktes:

- Graßmann-Identität

$$\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} \quad (1.12)$$

(Beweis \rightarrow Übung)

- Lagrange-Identität

$$(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 \times \vec{v}_1) \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{v}_2) - (\vec{u}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{v}_1) \quad (1.13)$$

(Beweis \rightarrow Übung)

- Jacobi-Identität

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0} \quad (1.14)$$

(Beweis \rightarrow Übung)

- Aus der Jacobi-Identität folgt, dass das Vektorprodukt i.A. nicht zyklisch ist
 $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$, d.h. Klammern sind wichtig!

Im Gegensatz dazu hatten wir $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

- * Wir kommen später auf diese Formeln zurück in der Differential- und Integralrechnung in 3 Dimensionen.

- * weitere Multiplikationen von Vektoren die $V \rightarrow V$ abbilden (in bel. Dim.):
 lineare Abbildungen und Matrixmultiplikation

1.2 Matrizen

lineare Abbildung $M: V \rightarrow V$
 $\vec{v} \rightarrow \vec{w} = M(\vec{v})$ auf K -Vektorraum V , wenn gilt

$$L 1 \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V: \quad M(\vec{v} + \vec{w}) = M(\vec{v}) + M(\vec{w}),$$

$$L 2 \quad \forall \vec{v} \in V, \forall a \in K: \quad M(a \cdot \vec{v}) = a \cdot M(\vec{v}).$$

Darstellung der linearen Abbildung: Matrix

- wähle ON Basis $\{\vec{e}_i\}_{i=1, \dots, n}$, so dass $\vec{v} = \sum_{j=1}^n v_j \vec{e}_j = v_j \vec{e}_j$

$$\Rightarrow \vec{w} = \sum_{k=1}^n w_k \vec{e}_k = M(\vec{v}) \stackrel{L1,2}{=} \sum_{j=1}^n v_j M(\vec{e}_j) \quad |\vec{e}_i \cdot, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$$

$$\Rightarrow w_i = \sum_{j=1}^n v_j \vec{e}_i M(\vec{e}_j) = M_{ij} v_j, \text{ wobei } \vec{e}_i M(\vec{e}_j) \equiv M_{ij} \in K, \text{ damit Resultat in } K$$

und M_{ij} Darstellung von M in Basis $\{\vec{e}_i\}$.

1 Lineare Algebra

Beispiele:

– lineares Gleichungssystem: \vec{w} , M gegeben:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}v_1 + \dots + M_{1n}v_n \\ \vdots \\ M_{i1}v_1 + \dots + M_{in}v_n \\ \vdots \\ M_{n1}v_1 + \dots + M_{nn}v_n \end{pmatrix} \\ \equiv \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1j} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i1} & \vdots & \ddots & M_{ij} & \ddots & M_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nj} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{M}_1 \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{M}_i \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{M}_n \cdot \vec{v} \end{pmatrix},$$

wobei \vec{M}_i der i -te Zeilenvektor ist.

– Nullmatrix: $0_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$,

– Einheitsmatrix: $1_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $M_{ij} = \delta_{ij}$.

• Im Allgemeinen betrachten wir im folgenden nur quadratische Matrizen $M \square$.

• Rechteckige Matrizen (z.B. in der Finanzmathematik) $\begin{pmatrix} \uparrow \text{Zeitreihen} \\ \downarrow \text{Firmen} \end{pmatrix}$

Beispiele:

–

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \text{ also } M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

–

M – $n \times m$ Matrix: $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- Transponierte Matrix: $(M^\top)_{ij} = M_{ji}$
(definiert für quadratisches und rechteckiges $M \Rightarrow MM^\top$ quadratisch)
insbesondere für Vektoren:

$$\vec{v} \in V \text{ als } n \times 1 \text{ "Matrix": } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ Spaltenvektor,}$$

$$v^\top = (v_1 \ \dots \ v_n) \text{ Zeilenvektor.}$$
(1.15)

- Skalarprodukt als Matrixprodukt:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w_i = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v^\top w \quad \text{Abbildung von } \mathbb{R}^n \rightarrow \underset{=K}{\mathbb{R}^1}.$$

- Symmetrische Matrix: $(M^\top)_{ij} = M_{ji} = +M_{ij}$, z.B. $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,
antisymmetrische Matrix: $(M^\top)_{ij} = M_{ji} = -M_{ij}$, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

- Operationen von Matrizen: $M, N: V \rightarrow V$
 - elementweises Addieren $(M + N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ wichtig: gleiche Dimension
 - mit Skalaren Multiplizieren $(aM)_{ij} = aM_{ij}$
- Hintereinanderausführung: $\vec{v} = N\vec{u}$, $\vec{w} = M\vec{v}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{w} &= M(N\vec{u}) \Rightarrow w_i = M_{ij}N_{jk}u_k && \text{ist } \underline{\text{assoziativ}} && A(BC) = (AB)C \\ \text{aber i.A. } \neq & N(M\vec{u}) \quad (= N_{ij}M_{jk}u_k) && \text{und } \underline{\text{distributiv}} && A(B+C) = AB+AC \end{aligned}$$

- Vertauschen von 2 Matrizen: Kommutator $[M, N] = MN - NM$
- Eigenschaften von "T"
 - * $(M^\top)^\top = M$
 - * $(M + N)^\top = M^\top + N^\top$

1 Lineare Algebra

$$* (MN)^\top = N^\top M^\top \quad \left(\text{denn } \begin{aligned} ((MN)^\top)_{ij} &= M_{jk} N_{kj} = (N^\top)_{ik} (M)_{kj} \\ &= (N^\top M^\top)_{ij} \end{aligned} \right)$$

⇒ z.B. MM^\top ist symmetrisch

- In der Quantenmechanik brauchen wir Matrizen mit $M_{ij} \in \mathbb{C}$
→ betrachte $K = \mathbb{C}$ Vektorraum, z.B. $V = \mathbb{C}^n$:

– konjugierte Matrix $(M^*)_{ij} = (M_{ij})^*$ * komplexe Konjugation

– adjungierte Matrix $(M^\dagger)_{ij} = (M_{ij})^\dagger = (M^\top)^*_{ij}$ † Kreuz
(engl. dagger)

– selbstadjungierte oder hermitesche Matrix $M^\dagger = M$

- wegen $(z^*)^* = z$ hat "†" dieselben Eigenschaften wie "⊤"
(Notation Mathematik: oft $z^* \rightarrow \bar{z}$, $M^\dagger \rightarrow M^*$)

Beispiel:

die Pauli-Matrizen sind hermitesch:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Funktionen von Matrizen

- viele wichtige Funktionen in der Physik besitzen eine Taylorreihendarstellung, die auf ganz \mathbb{R} (oder sogar \mathbb{C}) konvergiert

Beispiele:

$$* e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$* \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \text{ etc.}$$

$$(e^{ix} = \cos x + i \sin x)$$

Damit definieren wir z.B. $(e^M)_{ij} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (M^n)_{ij}$,

wegen $AB \neq BA$ gilt aber i.A. $e^{AB} \neq e^{BA}$ (nicht kommutierende Matrizen)

oder allgemeiner: $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \Rightarrow F(M) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j M^j$.

- Insbesondere sind einfache Beispiele P_k Polynome vom Grad k :
 $a_j = 0 \quad \forall j > k : \quad P_2(M) = a\mathbb{1} + bM + cM^2$, wobei a, b und c Skalare $\in K$.

Das transponierte M^\top einer Matrix M ist wichtig z.B. bei

Drehungen: lineare Abbildung (gegeben durch Matrixmultiplikation), die das Skalarprodukt invariant läßt (und damit insbesondere die Norm aller Vektoren!):
=Länge

$$\begin{aligned}\vec{x} &\rightarrow \vec{x}' = O \vec{x} \quad (= O x \text{ als Spaltenvektor) mit} \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &\stackrel{!}{=} \vec{x}' \cdot \vec{y}' = (x')^\top y' = (O x)^\top (O y) = x^\top O^\top O y \stackrel{!}{=} x^\top y \\ &\Rightarrow O^\top O = \mathbf{1}.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Matrizen, deren inverse Matrix $O^{-1} = O^\top$, heißen orthogonal. Es gilt auch $O O^\top = \mathbf{1}$.
 (O : orthogonale Transformation)

- für einen \mathbb{C} -Vektorraum, z.B. \mathbb{C}^n läßt sich mit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n$: $\vec{u}^* \cdot \vec{v}$ ein (nicht kommutatives) Skalarprodukt definieren, das eine positiv definite Norm hat.
 Dies wird durch folgende lineare Abbildung invariant gelassen:

$$\begin{aligned}\vec{u} &\rightarrow \vec{u}' = U \vec{u}, \quad \vec{v} \rightarrow \vec{v}' = U \vec{v} \\ &\Rightarrow (\vec{u}')^* \cdot \vec{v}' = (U \vec{u})^{\top*} \cdot U \vec{v} = u^{\top*} U^{\top*} U \vec{v} \stackrel{!}{=} u^{\top*} \vec{v} \\ &\Rightarrow U^\dagger U = \mathbf{1},\end{aligned}\tag{1.18}$$

solche Matrizen heißen unitär. Es gilt auch $U U^\dagger = \mathbf{1}$.
 (U : unitäre Transformation)

Drehung der Basis

Sei $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ eine ON Basis: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

$\Rightarrow \vec{e}'_i = O \vec{e}_i$ bildet eine neue ON Basis da $\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij}$, wenn O orthogonal ist $O^\top O = \mathbf{1}$, und da $1 = |\vec{e}_i| = |\vec{e}'_i|$.

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$ mit kanonischer Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$: Drehung um

$$\begin{array}{ccc} D_{z,\phi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & D_{y,\phi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix} & D_{x,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix} \\ z\text{-Achse} & y\text{-Achse} & x\text{-Achse} \end{array}\tag{1.19}$$

um Winkel ϕ im positiven Sinn, $c = \cos \phi$, $s = \sin \phi$.

1 Lineare Algebra

Abbildungen von Matrizen in den Körper K :

Spur (Sp) einer Matrix (engl. trace (tr)), M $n \times n$ Matrix:

$$\text{Sp}M = \sum_{i=1}^n M_{ii} = M_{ii} \quad \underline{\text{Summe der Diagonalelemente.}} \quad (1.20)$$

Es gilt:

* $\text{Sp}(M^\top) = \text{Sp}M$ (\top "spiegelt" M an der Diagonalen, die Diagonale ist invariant)
 (= $(M^\top)_{ii} = M_{ii}$)

* $\text{Sp}(MN) = \text{Sp}(NM)$ für M, N $n \times n$ Matrizen
 (denn $\text{Sp}(MN) = M_{ik}N_{ki} = N_{ki}M_{ik} = \text{Sp}(NM)$)
 $\Rightarrow \text{Sp}(LMN) = \text{Sp}(MNL) = \text{Sp}(NLM)$

* Die Spur ist invariant unter einer orthogonalen Transformation der Basis:

- $\vec{e}'_i = O\vec{e}_i$, welche Komponenten hat $\vec{v} = v_i\vec{e}_i$ in der neuen Basis?

-

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_i\vec{e}_i = v'_i\vec{e}'_i \quad (\vec{v} \text{ wird nicht gedreht, nur die Basis}) \\ \Rightarrow v'_i &= \vec{e}'_i \cdot \vec{v} = (Oe_i)^\top v = e_i^\top O^\top v = (O^\top v)_i \\ \Leftrightarrow v'_i &= O_{ik}^\top v_k = \underline{O_{ki}v_k} \end{aligned} \quad (1.21)$$

- Matrixelemente in alter Basis: $M_{ij} = \vec{e}_i M \vec{e}_j$
 in neuer Basis:

$$\begin{aligned} M'_{ij} &= \vec{e}'_i \cdot M \cdot \vec{e}'_j = (Oe_i)^\top M Oe_j = \vec{e}_i (O^\top M O) \vec{e}_j = (O^\top M O)_{ij} \\ \Leftrightarrow M'_{ij} &= \underline{O_{ik}^\top M_{kl} O_{lj}} = \underline{O_{ki} O_{lj} M_{kl}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(M') = \text{Sp}(O^\top M O) = \text{Sp}\left(\underbrace{O^\top O}_{=1} M\right) = \text{Sp}(M)$$

- dito für unitäre Trafos.

Tensoren: Verallgemeinerung von Vektoren, Matrizen, definiert durch Trafo:
 T_{i_1, \dots, i_k} ist ein Tensor k -ter Stufe, wenn er wie folgt unter O orthog. transformiert:

$$T'_{i_1, \dots, i_k} = O_{l_1 i_1} \dots O_{l_k i_k} T_{l_1, \dots, l_k}. \tag{1.23}$$

Beispiele:

Skalar $a \in K$	Vektor v_i	Matrix M_{ij}	ϵ_{ijk} -Tensor
Tensor 0-ter Stufe	1-ter Stufe	2-ter Stufe	3-ter Stufe
R_{ijkl} Riemann-Tensor \rightarrow Allgemeine Relativitätstheorie			
Tensor 4-ter Stufe			

Determinante einer quadratischer $n \times n$ Matrix M : $\det(M) \in K$.

- Um \det zu definieren schreiben wir M ausgedrückt durch n Spaltenvektoren:

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ m_1 & m_2 & , \dots, & m_n \\ | & | & & | \end{array} \right).$$

- Die Determinante von M ist durch folgende Eigenschaften definiert [K. Weierstraß]:

D 1 $\det(M)$ ist linear in jeder Spalte:

a) $\det(m_1, \dots, m_j = m'_j + m''_j, \dots, m_n) = \det(m_1, \dots, m'_j, \dots, m_n) + \det(m_1, \dots, m''_j, \dots, m_n)$,
 sowie

b) $\det(m_1, \dots, \alpha m_j, \dots, m_n) = \alpha \det(m_1, \dots, m_j, \dots, m_n)$ für $\alpha \in K$,

D 2 $\det(M)$ ist alternierend, d.h. $\det M = 0$ falls 2 Spalten gleich:

$$\det \left(m_1, \dots, \underset{i\text{-te}}{m_i}, \dots, \underset{j\text{-te}}{m_i}, \dots, m_n \right) = 0,$$

D 3 $\det(M)$ ist normiert, d.h. für die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_{n \times n}$ gilt:

$$1 = \det(\mathbb{1}_{n \times n}) \quad (= \det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \text{ für } \{\vec{e}_i\} \text{ die kanonische ON Basis}).$$

* Aus *D 1* folgt, dass sich 2 Matrizen, die sich in genau einer Spalte unterscheiden addieren lassen.

Im Allgemeinen gilt aber $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$, für A, B beliebige $n \times n$ Matrizen.

- Die folgenden Eigenschaften von \det folgen aus *D 1 - D 3*, für alle Beweise siehe z.B. Gerd Fischer, *Lineare Algebra*.

1 Lineare Algebra

* Für $M \ n \times n, \alpha \in K$ gilt $\det(\alpha M) = \alpha^n \det(M)$.

\uparrow
 punktweise mult.
 aller Matrix-Elemente

* Für $M = (m_1, \dots, m_n)$ mit $\exists i: m_i = \vec{0}$ gilt $\det(M) = 0$.

* $\det(m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_n) = \det(m_1, \dots, m_j, \dots, m_i, \dots, m_n)$

\uparrow \uparrow
 i -te j -te

* \det ist invariant unter Addition von Spalten mit $i \neq j$:

$$\det(m_1, \dots, m_i + \alpha m_j, \dots, m_j, \dots, m_n) = \det(m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_n).$$

\uparrow
 i -te

* Ist M eine obere Dreiecksmatrix $M = \begin{pmatrix} x_1 & - & \\ & \diagdown & | \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}$, so gilt: $\det(M) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$

Satz: Die Determinante existiert und ist eindeutig, und es gilt für

$$\det(M_{ij}) = \sum_{\substack{\sigma \\ \uparrow \text{ alle Permutationen}}} \text{sign}(\sigma) M_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot M_{n\sigma(n)}, \quad (1.24)$$

[G.W. Leibniz].

Permutationen: σ ist eine Permutation von $(1, 2, \dots, n) \rightarrow (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)) \equiv (i_1, i_2, \dots, i_n)$

- σ ist gerade (symmetrisch), wenn sie aus einer geraden Anzahl von Paarvertauschungen besteht $\Rightarrow \text{sign}(\sigma) = +1$
- σ ist ungerade (antisymmetrisch), wenn sie aus einer ungeraden Anzahl von Paarvertauschungen besteht $\Rightarrow \text{sign}(\sigma) = -1$
- Wir können sign (Permutationen) mit dem Levi-Cevita-Symbol schreiben (total anti-sym. Tensor n -ter Stufe):

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \sigma \text{ gerade Permutation} \\ -1 & \sigma \text{ ungerade Permutation} \\ 0 & 2 \text{ oder mehrere Indizes gleich (also keine Permutation)} \end{cases} \quad (1.25)$$

$$\Rightarrow \det(M_{ij}) = \left(\sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \right) \epsilon_{i_1 \dots i_n} M_{1i_1} \dots M_{ni_n} \quad (1.26)$$

Beispiel $n = 2$:

$$\begin{aligned} \exists n! = 2 \text{ Permutationen } & \begin{array}{l} (1, 2) \rightarrow (1, 2) \text{ Identität, gerade (0 Paar vertauscht.)} \\ (1, 2) \rightarrow (2, 1) \text{ ungerade (1 Paar vertauscht)} \end{array} \\ \Rightarrow \det \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} &= +M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \underbrace{\epsilon_{12}}_{=1} M_{11}M_{22} + \underbrace{\epsilon_{21}}_{=-1} M_{12}M_{21} \\ (\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0) & \end{aligned}$$

Beispiel $n = 3$:

$\exists n! = 3! = 6$ Permutationen, wir kennen ϵ_{ijk} schon (1.10), (zeige, dass es daselbe ist, wie Levi-Cevita.)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(M) &= \epsilon_{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k}, \\ \text{oder } \det(M_{ij}) &= \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = M_{11}M_{22}M_{33} + M_{12}M_{23}M_{31} + M_{13}M_{21}M_{32} \\ &\quad - M_{13}M_{22}M_{31} - M_{11}M_{23}M_{32} - M_{12}M_{21}M_{33} \\ &= \text{Sarrussche Regel } \setminus + \text{ } / - \end{aligned}$$

- für $n \geq 4$ gibt es keine einfache Regeln mehr

Weitere Eigenschaften für beliebiges n :

$$* \det(M^T) = \det M$$

$$\begin{aligned} \det(M^T) &= \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) M_{\sigma(1)1} \dots M_{\sigma(n)n} && \downarrow \text{Umordnung} \\ &= \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma^{-1}) M_{1\sigma^{-1}(1)} \dots M_{n\sigma^{-1}(n)} = \det(M), \text{ da } \sigma \rightarrow \sigma^{-1} \text{ bijektiv ist} \\ \Rightarrow \text{Alle Eigenschaften von } \det &\text{ gelten auch für Zeilenvektoren (inkl. die Definition darüber)} \end{aligned}$$

* Multiplikationssatz für Determinanten

$$M, N \ n \times n \Rightarrow \det(M \cdot N) = \det(M)\det(N) \quad (1.27)$$

\Rightarrow Reihenfolge der Matrizen in der \det egal
Insbesondere folgt $\det(N \cdot M)$

und für invertierbares M :

$$\exists M^{-1} : MM^{-1} = \mathbf{1} \Rightarrow \det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} (= (\det(M))^{-1}) \quad (1.28)$$

1 Lineare Algebra

$$\begin{aligned} \text{denn: } M &= \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 & \dots & m_n \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ mit } m_1 = M_{j_1} \text{ etc.} \\ \text{dito } N &= \begin{pmatrix} | & & | \\ n_1 & \dots & n_n \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ mit } n_i = N_{j_i} \text{ etc.} \\ (M \cdot N)_{ij} &= M_{ik} N_{kj} = \begin{pmatrix} M_{ik_1} N_{k_1 j} & M_{ik_2} N_{k_2 j} & \dots & M_{ik_n} N_{k_n j} \end{pmatrix} \\ &\text{Linearkombination von Vektoren } m_{k_n} \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(M \cdot N) &\stackrel{\text{det Linear}}{=} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n \det(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}) N_{i_1 1} \dots N_{i_n n} \\ &\stackrel{\text{det antisym.}}{=} \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \det(m_1, \dots, m_n) N_{i_1 1} \dots N_{i_n n} \\ &= \det(M) \cdot \det(N) \end{aligned}$$

- wie schon die Spur ist auch die Determinante invariant unter Orthogonalen (und unitären) Transformationen:

$$\begin{aligned} M' = O^T M O \quad \det(M') &= \det(O^T M O) \\ \text{mit } O^T O = \mathbf{1} \quad \Rightarrow &= \det(\underbrace{O^T O}_=\mathbf{1}) M = \det(M) \end{aligned}$$

dito für $M' = U^\dagger M U$ mit $U^\dagger U = \mathbf{1}$.

(oder sogar für jede Ähnlichkeits-trafo $M' = P^{-1} M P$ mit $P^{-1} P = \mathbf{1}_{n \times n}$)

Eigenschaften von inversen Matrizen:

Falls es für eine $n \times n$ Matrix M eine $n \times n$ Matrix N gibt mit $NM = \mathbf{1}_{n \times n}$, dann ist $N \equiv M^{-1}$ die inverse Matrix zu M . M heißt dann nicht singulär, regulär oder invertierbar.

- * es gilt $MN = \mathbf{1}_{n \times n}$ (Rechtsinverse = Linksinverse)
(denn: $w = Mv \Rightarrow Nw = NMv = v \Rightarrow w = Mv = MNw$
 $\Rightarrow (MN)_{ij} = \delta_{ij}$ oder $MN = \mathbf{1}_{n \times n}$)
- * wenn M^{-1} existiert, ist dies eindeutig
(denn: seien N, N' beides inverse, so gilt:
 $N' = N' \mathbf{1}_{n \times n} = N'(MN) = \mathbf{1}_{n \times n} N = N$)
- * $\boxed{(M^{-1})^{-1} = M}$ (denn $MM^{-1} = \mathbf{1}_{n \times n}$ also $M = (M^{-1})^{-1}$)

* $\boxed{(M_1 M_2)^{-1} = M_2^{-1} M_1^{-1}}$ (vertauscht die Ordnung wie \top, \dagger)
 (denn: $M_2^{-1} M_1^{-1} M_1 M_2 = M_2^{-1} M_2 = \mathbb{1}_{n \times n}$, also $M_2^{-1} M_1^{-1} = (M_1 M_2)^{-1}$)

- wir kennen Beispiele für reguläre Matrizen bereits:

orthogonal \sim , mit $O^\top O = \mathbb{1}_{n \times n}$, d.h. $O^\top = O^{-1} \Rightarrow O O^\top = \mathbb{1}$
 unitär \sim , mit $U^\dagger U = \mathbb{1}_{n \times n}$, d.h. $U^\dagger = U^{-1} \Rightarrow U U^\dagger = \mathbb{1}$

- *Beispiel* dafür, dass Matrizen zu sich selbst invers sein können (und $\neq \mathbb{1}_{n \times n}$ selbst sind):

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{n \times n}$, d.h. $\sigma_x^{-1} = \sigma_x$
 dasselbe gilt für σ_y und σ_z

- Wie findet man die inverse einer Matrix (wenn sie existiert)?
 Dies hängt eng mit der allgemeinen Berechnung von Determinanten zusammen!

Berechnung von Determinanten für allgemeine Dimension

1. Laplacescher Entwicklungssatz M $n \times n$ Matrix

a) Entwicklung nach der j -ten Spalte:

$$\det M = \sum_{i=1}^n M_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} \det(\hat{M}_{ij})}_{\equiv \text{Kofaktor: } \text{cof}(M)_{ij}}, \quad (1.29)$$

wobei \hat{M} wie M ohne i -te Zeile und ohne j -te Spalte ist, d.h. $(n-1) \times (n-1)$ Matrix.

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1j} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ M_{i1} & \dots & M_{ij} & \dots & M_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{in} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}; (-1)^{i+j} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & - & + & - & \\ \hline - & + & - & + & \\ \hline + & - & + & & \\ \hline & & & + & \\ \hline & & & & + \\ \hline \end{array}$$

Spezialfall einer Hankelmatrix $A_{ij} = A_{i+j}$
Toeplitzmatrix $B_{ij} = B_{i-j}$

b) Entwicklung nach i -ten Zeile:

$$\det M = \sum_{j=1}^n M_{ij} (-1)^{i+j} \det(\hat{M}_{ij}), \quad (1.30)$$

1 Lineare Algebra

denn aus Def.: $\det M = \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} M_{1i_1} \dots M_{ni_n}$

$= \sum_{i_i=1}^n M_{ii} \underbrace{\sum_{i_1, \dots, \cancel{i_i}, \dots, i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} M_{1i_1} \dots \cancel{M_{ii}} \dots M_{ni_n}}_{\pm 1 \epsilon_{i_1 \dots \cancel{i_i} \dots i_n} = \pm \det \hat{M}_{ij}}$

a) \Rightarrow b) durch \top

Beispiel:

- wähle immer Zeile (Spalte) mit vielen Nullen:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} +0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 27 \\ +0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 27 \end{cases}$$

c) Entwicklung nach Blöcken:

entwickle $n \times n$ Matrix nach $m \times m$ Unterblöcken ($m < n$)

- es gibt $N = \binom{n}{m}$ Möglichkeiten Unterblöcke zu wählen:

$$\det M = \sum_{j=1}^N \epsilon_j \det B_j \det C_j, \tag{1.31}$$

wobei ϵ_j Vorzeichen um Zeilen von B in diese Reihenfolge zu bringen
 $\det C_j$ Komplementäre Matrix: M nach Streichung der Zeilen und Spalten von B

Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \text{ in } 2 \times 2 \text{ Blöcke: } \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

$$\Rightarrow \det M = + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & l \\ o & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} j & l \\ n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} j & k \\ n & o \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & l \\ m & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & d \\ f & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & k \\ m & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & j \\ m & n \end{vmatrix}$$

2. Gaußscher Algorithmus (sehr effektiv für $n \geq 4$)

Idee: bringe Matrix M durch Zeilen- (oder Spalten-) umformungen auf obere Dreiecksmatrix-Form, ändert nicht, aber dann $\det M = \text{Produkt der Diagonalelemente}$:

Beispiel:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} &= + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} \cdot (-2) \leftarrow + = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \leftarrow + = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{16-7}{2} \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \frac{9}{2} = 27 \end{aligned}$$

Anwendung Blockmatrizen

- gegeben A, B, C, D $n \times n$ Matrizen

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

(denn: Laplaceentwicklung nach Blöcken)

- für A regulär ($\exists A^{-1}$) gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$$

(denn: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$, benutze $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ sowie Eigenschaften oben)

- außer der Spur und der Determinante gibt es weitere Abb. $M \rightarrow K$ Körper

- * für A $2n \times 2n$ antisymmetrisch definiere die Pfaffische Determinante (engl. Pfaffian):

$$\begin{aligned} \text{Pf}(A) &= \frac{1}{2^n n!} \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} A_{i_1 i_2} \dots A_{i_{2n-1} i_{2n}} \\ (\text{vgl. } \det(A) &= \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} A_{1 i_1} A_{2 i_2} \dots A_{2n i_{2n}}) \end{aligned}$$

und es gilt $\boxed{(\text{Pf}(A))^2 = \det(A)}$.

Anwendung: $\text{Pf} A'' = \det \tilde{A}$, \tilde{A} $n \times n$ Matrix mit \tilde{A}_{ij} Quaternionen, Majorana-Fermionen

Bestimmung der Inversen einer Matrix (falls diese existiert!)

- brauchen detM und Kofaktor-Matrix $(-1)^{i+j} \det \hat{M}_{ij}$ dazu:

$$\det M = \sum_{j_1, \dots, j_i, \dots, j_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} M_{1j_1} \dots \underbrace{M_{ij_i}}_{i\text{-te}} \dots M_{nj_n}$$

betrachte $f_i(k) = \sum_{j_1, \dots, j_n} \underbrace{\epsilon_{j_1 \dots j_n}}_{\text{antisymm. u. Vert.}} M_{1j_1} \dots M_{kj_i} \dots M_{kj_k} \dots M_{nj_n} = 0$
 für $k \neq i$
 für festes i

Argument $k \downarrow \downarrow$ Index i
 $\uparrow \quad \uparrow$
 symm. u. Vert. v. j_i und j_k

für $f_i(i) = \det M$, d.h. $f_i(k) = \delta_{ki} \det M$

$$= \sum_{j_i=1}^n M_{kj_i} \underbrace{\sum_{j_1, \dots, \cancel{j_i}, \dots, j_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} M_{1j_1} \dots \cancel{M_{ij_i}} \dots M_{nj_n}}_{= (\text{adj}M)_{j_i i} = (\text{Cof}(M))_{ij_i}}, \quad \text{siehe (1.29)}$$

$$\text{Adjunkte} = (\text{Kofaktor})^\top$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j_i=1}^n M_{kj_i} (\text{adj}M)_{j_i i} = (\mathbf{1}_{n \times n})_{ki} \det M$$

\Rightarrow haben inverse Matrix \uparrow zu M falls $\det M \neq 0$.

Satz: $\det M \neq 0 \Leftrightarrow M$ ist regulär, d.h. besitzt M^{-1} :
 ” \Rightarrow ” $\det M \neq 0$

$$\Rightarrow M^{-1} = \frac{\text{adj}M}{\det M}$$

” \Leftarrow ” $\exists M^{-1} : MM^{-1} = \mathbf{1}$:

$$\Rightarrow \det(MM^{-1}) = \det M \cdot \det M^{-1} = 1$$

da M^{-1} existiert, ist $\det M^{-1} < \infty \Rightarrow \det M \neq 0$.

Beispiel: $n = 2$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = ad - bc \neq 0$

+	-
-	+

$$\Rightarrow \text{cof}(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{check!}$$

Matrix-Inversion durch Gauß-Jordan Verfahren

- dient auch zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

$$\begin{aligned}
 Mv = w = \mathbb{1}w, \det M \neq 0 &\Rightarrow \exists M^{-1}: M^{-1}Mv = v = M^{-1}w \\
 &\Leftrightarrow M_{11}v_1 + M_{12}v_2 + \dots + M_{1n}v_n = w_1 \\
 &\quad \vdots \\
 &M_{n1}v_1 + \dots + M_{nn}v_n = w_n
 \end{aligned}$$

* Gleichungssysteme ändern sich nicht, wenn wir:

- Gleichungen vertauschen,
- Gleichungen mit einer konstanten $c \neq 0$ multiplizieren,
- Linearkombinationen von Gleichungen bilden.

Beginne mit der 1. Spalte, o.B.d.A. $M_{11} \neq 0$

- teile 1. Gl. durch M_{11}
- Subtrahiere $M_{j1} \cdot 1.$ Gl. von den übrigen Gleichungen

$$\begin{aligned}
 &1v_1 + \dots \\
 \Rightarrow &0v_1 + M'_{22}v_2 \\
 &\vdots \\
 &0v_1 + \dots
 \end{aligned}$$

- wähle die 2. Spalte, o.B.d.A. $M'_{22} \neq 0$, normiere durch $\text{Gl.} \cdot 1/M'_{22}$, usw

* wir machen dieselben Umformungen auf der rechten Seite mit $\mathbb{1}$
 \Rightarrow am Ende $\mathbb{1}v = M^{-1}w$.
 (Diese Umformungen lassen sich auch durch Matrixmult. darstellen.)

1 Lineare Algebra

$$\begin{array}{r}
 M = \left(\begin{array}{cc|cc}
 2 & 3 & 1 & 0 \\
 1 & 2 & 0 & 1 \\
 \hline
 \frac{1}{2} \cdot & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\
 & 1 & 2 & 1 \\
 \hline
 -I & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\
 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
 \hline
 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\
 2 \cdot & 0 & 1 & -1 \\
 \hline
 1 & 0 & 2 & -3 \\
 0 & 1 & -1 & 2
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\text{check: } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$