Rechenmethoden der Physik

Vorlesungsskript

Prof. Dr. Gernot Akemann

Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

Inhaltsverzeichnis

0 Inhaltsübersicht

0.1 Literatur: einige Standardwerke

- S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (10. Aufl.), Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2012.
- H. Schulz, *Physik mit Bleistift* (6. Aufl.), Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2006.
- C.B. Lang und N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik* (2. Aufl.), Spektrum Akad. Verl., Heidelberg, 2005.
- I.N. Bronstein und K.A. Semendjaev, *Taschenbuch der Mathematik* (8. Aufl.), Verlag Harri Deutsch, 2012.
- G. Fischer, *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger* (18. Aufl.), Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 2014.

→ Semesterapparat

0.2 Übersicht

1. Lineare Algebra
2. Analysis in 1 Dimension
3. Analysis in ≥ 1 Dimension
4. Fourier-Transformation

1 Lineare Algebra

Lit.: Gerd Fischer, *Lineare Algebra*

1.1 Vektoren und Skalare

Gruppe G: Menge G mit Verknüpfung $+:\ G \times G \to G$

- $G\ 0$ abgeschlossen $\forall\, a, b \in G$: $a + b \in G$
- $G\ 1$ $+$ assoziativ $(a+b)+c = a+(b+c)$
- $G\ 2$ $\exists$ neutrales Element e: $\forall a \in G$: $e + a = a$
- $G\ 3$ $\forall a$: $\exists$ inverses a': $a' + a = e$

G ist abelsch, wenn $\forall a, b$: $a + b = b + a$

Körper K: Menge K mit 2 Verknüpfungen $(K, +, \cdot\,)$

- $K\ 1$ $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe, $e = 0$, $a' = -a$
- $K\ 2$ $K^* \equiv K \setminus \{0\}$ ist eine Untergruppe: $K^* \subset K$ bzgl. $\cdot$
  und $(K^*, \cdot)$ ist abelsch, neutr. Element $\equiv 1$, $a' = a^{-1}$
- $K\ 3$ Distributivgesetze $\begin{aligned} a \cdot (b+c) &= a \cdot b + a \cdot c\,, \\ \Rightarrow (a+b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$

Beispiele:
$K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ mit üblicher Addition und Multiplikation. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&e, a' \text{sind eindeutig}\,, \\
&\forall\, a \in K : a \cdot 0 = 0\,, \\
&\forall\, a, b \in K : a \cdot b = 0 \ \Rightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0\,.
\end{aligned}
$$

Vektorraum über K (K-Vektorraum): K Körper, V Menge mit 2 Verknüpfungen $+, \cdot$;

- $+$ <u>Addition</u> $V \times V \to V$: $\vec{v}, \vec{w} \in V \to \vec{v} + \vec{w} \in V$

· <u>Multiplikation</u> mit Element aus dem Körper $K \times V \to V$: $a \in K$, $\vec{v} \in V \to a \cdot \vec{v} \in V$ mit:

V 1 $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe, mit $e \equiv \vec{0}$ <u>Nullvektor</u> und <u>inversem Element</u> $-\vec{v}$ zu $\vec{v}$, so dass $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

V 2 Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} (a+b) \cdot \vec{v} &= a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}\,, \\ a(b \cdot \vec{v}) &= (ab) \cdot \vec{v}\,, \\ a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}\,, \\ \text{und } 1 \cdot \vec{v} &= \vec{v}\,, \text{ wobei } 1 \in K\,. \end{aligned}$$

Die Elemente von K heißen <u>Skalare</u> (z. B. m, T, ...), die von V <u>Vektoren</u> und werden mit $\vec{\ }$ gekennzeichnet (z. B. Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, Impuls $m \cdot \vec{v} = \vec{p}$, Drehimpuls $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$, ...)

Beispiel:
$K = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $\underset{\text{oder } V=\text{Polynome}}{V = \mathbb{R}^n}$, $\vec{v}$ n-Tupel in $\mathbb{R}^n$.

- Um zu einer expliziten Darstellung von Vektoren zu gelangen (u. a. um mit ihnen konkret zu rechnen) müssen wir eine Basis einführen
- Vektorenaddition u. skalare Multiplikation iteriert: (Geometrische Bedeutung → Ü)

Linearkombination: $\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i \in V$
die Vektoren $\vec{v}_1$, ...,$\vec{v}_k \neq \vec{0}$ sind <u>linear unabhängig</u> falls gilt

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \forall\, i = 1, ..., k: \;\; a_i = 0\,, \tag{1.1}$$

gibt es eine Lösung für (1.1) mit mind. einem $a_j \neq 0$, so sind die Vektoren <u>linear abhängig</u>:
$\vec{v}_j = -\frac{1}{a_j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} a_i \vec{v}_i\,.$

Basis (Fundamentalsystem):
Die Menge von Vektoren $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ bildet eine Basis von V falls

B 1 sie sind linear unabhängig,

B 2 sie spannen V auf: $V = \operatorname{span}(\vec{e}_i)_{i=1,...,n}$: $\forall \vec{v} \in V\ \exists v_1, ..., v_n \in K$ mit $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i\,.$

Dann ist die Dimension $\dim V = n$

- eine Wahl der Basis ist nicht eindeutig, z. B. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ Basis von $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2\}$ ist auch eine Basis
- nach Wahl einer Basis sind die Komponenten v_i eines Vektors $\vec{v}$ bzg. dieser Basis eindeutig!
  Dann

$$\begin{aligned} &\exists\, v_1, ..., v_n; w_1, ..., w_n \text{ mit} \\ &\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{e}_i \\ \Rightarrow &\vec{0} = \vec{v} - \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} (v_i - w_i)\, \vec{e}_i, \vec{e}_i \text{ linear unabh. } \Rightarrow \forall_{i=1,\dots,n}\, , v_i = w_i\, . \end{aligned}$$

Beispiele:
$\mathbb{R}^3$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, Basis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$;
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 3-Tupel mit kanonischer Basis $\vec{e}_x = (1,0,0)$, $\vec{e}_y = (0,1,0)$, $\vec{e}_z = (0,0,1)$ und Addition komonentenweise (sowie Multiplikation)

- die Menge der Polynome mit maximalen Grad n ist ein $(n+1)$-dim. Vektorraum
- Phasenraum eines Teilchens in der klass. Mechanik $\mathbb{R}^6 \ni \{x, y, z, p_x, p_y, p_z\}$
  $\rightarrow$ höhere Dim. für mehr Teilchen

$\underset{\text{(inneresProdukt)}}{\textbf{Skalarprodukt}}$: die Multiplikation von $\begin{matrix} \vec{v}, \vec{w} \in V & V \times V \rightarrow K \\ \text{Abb. in K} & (\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} \in K \end{matrix}$
heißt Skalarprodukt falls gilt:

- $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{w}$ abelsch (es gibt auch nicht abelsch: $K = \mathbb{C}$: $\vec{v}^* \cdot \vec{w}$),
- $\vec{v}\,(a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2) = a_1 \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + a_2 \vec{v} \cdot \vec{w}_2$ linear,
- $\left.\begin{matrix} |\vec{v}|^2 \equiv \vec{v} \cdot \vec{v} & \geq 0 \\ |\vec{v}|^2 = 0 & \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \end{matrix}\right\}$ positiv definit, $|\vec{v}|$ ist die **Norm** ("Länge") von $\vec{v}$,

es gilt **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:**

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}||\vec{w}|\, . \tag{1.2}$$

(Denn $0 \leq |\lambda \vec{v} + \vec{w}|^2$,
oBdA $\vec{v} \neq \vec{0}$, wähle $\lambda = -\vec{v} \cdot \vec{w} / |\vec{v}|^2$ u. Gl. $\cdot |\vec{v}|^2$

$\Rightarrow 0 \leq -(\vec{v} \cdot \vec{w})^2 + |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2$.)

Dreiecksungleichung:

$$|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}| \,. \tag{1.3}$$

(Denn $|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + 2\,\vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{w}|^2 \leq |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v} \cdot \vec{w}| + |\vec{w}|^2 \leq (|\vec{v}| + |\vec{w}|)^2$, oder geom. Beweis für $\mathbb{R}^2$.)

- 2 Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in V$ heißen **orthogonal** falls $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
  Wir definieren einen **Winkel** θ zwischen 2 Vektoren:

$$\text{für } \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}: \; \cos\theta := \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} \,, \tag{1.4}$$

  wegen Cauchy-Schwarz (1.2) gilt $|\cos\theta| \leq 1$.

- insbesondere haben wir für $\theta = \pi/2$: $\vec{v} \perp \vec{w}$ Orthogonalität.

Orthonormale (ON) Basis: gegeben eine Basis $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ von V, gilt

$$\forall_{i,j=1,...,n} \text{ mit } i \neq j: \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \,, \text{so ist diese } \underline{\text{orthogonal}}. \tag{1.5}$$

Ist zusätzlich $\forall_{i=1,...,n}\ |\vec{e}_i| = 1$ ist sie <u>orthonormal</u>.
(Können wir immer durch Normierung erzielen $\vec{e}_i \to \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}$, da $\forall_i\ \vec{e}_i \neq \vec{0}$ (lin. unabh.!).)

- aus einer beliebigen Basis $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ kann immer eine orthn. Basis rekursiv konstruiert werden: **Gram-Schmidt Verfahren**:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &:= \vec{a}_1 \,, \\
\vec{b}_2 &:= \vec{a}_2 - \frac{\left(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1\right)}{|\vec{b}_1|^2} \vec{b}_1 \,, \\
&\vdots \\
\vec{b}_k &:= \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\left(\vec{a}_k \cdot \vec{b}_i\right)}{|\vec{b}_i|^2} \vec{b}_i
\end{aligned} \tag{1.6}$$

  mit $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0$ für $i \neq j$, dann $\vec{e}_j = \vec{b}_j / |\vec{b}_j|$ ist ON Basis.

- In einer ON Basis gilt:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$
$$= v_i w_i \text{ (Einsteinsche Summenkonvention über gleiche Indizes),}$$

wegen

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1\,,\ i = j \\ 0\,,\ i \neq j \end{cases} \quad \textbf{Kronecker Delta}\,. \tag{1.7}$$

- bisher hatten wir $\begin{array}{ll} \text{skalare Mult.} & K \times V \to V : a \cdot \vec{v} \\ \text{Skalarprodukt} & V \times V \to K : \vec{v} \cdot \vec{w} \end{array}$.
  Gibt es weitere Multiplikationen, die wieder in V führen?
  Ja!: $\begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 \text{ "=" } \mathbb{C} & : z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C} \text{ Mult. komplexer Zahlen } z = \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \ \to \ \text{Ü} \\ \mathbb{R}^3 & : \text{Vektorprodukt} \end{array}$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt o. äußeres Produkt) auf $\underline{V = \mathbb{R}^3}$

$$\text{"}\times\text{"}: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.8}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- $\begin{array}{rrl} \underline{\text{antisymmetrisch}}: & \vec{u} \times \vec{v} = & -\vec{v} \times \vec{u} \quad \left(\Rightarrow \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0} \right)\,, \\ \underline{\text{linear}}: & \vec{u} \times (a\vec{v} + b\vec{w}) = & a\,(\vec{u} \times \vec{v}) + b\,(\vec{u} \times \vec{w})\,. \end{array}$

- Wenn wir "×" auf einer ON Basis defeinieren, ist es für alle Vektoren auf $\mathbb{R}^3$ definiert:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{e}_1 & \times & \vec{e}_2 & = & \vec{e}_3 \\ {\scriptstyle 2} & & {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 2} \end{array} \quad \text{zyklisch}\,.$$

  → Figur 1 (Rechtshändige ON Basis)

  In einer <u>rechtshändigen ON Basis</u> gilt:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) &= (u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3) \times (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3) \\
&\overset{\text{linear}}{=} (u_1 v_2 - u_2 v_1) \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{=\vec{e}_3} + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{=\vec{e}_1} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{=\vec{e}_2} \\
&= \underline{(u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}_3}\,, \\
\leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v})_i &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} u_j v_k \,.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Total anti-sym. Epsilon-Tensor (3. Stufe: 3 Indizes)

$$
\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{, wenn je 2 (oder mehr) Indizes gleich} \\ +1 & \text{, wenn } ijk \text{ zyklische Permutationen von } \{1,2,3\} \\ -1 & \text{, wenn } ijk \text{ nicht zyklische Permutationen von } \{1,2,3\} \end{cases}
\tag{1.10}
$$

3 Indizes $\Rightarrow$ 3! = 6 Permutationen:

+	-
ϵ_{123}	ϵ_{132}
231	321
312	213

Vorzeichen ändert sich nicht bei zyklischer Vertauschung. Skalarprodukt und Vektorprodukt spielen eine wichtige Rolle in der Elektrodynamik, mit Ableitungen als Komponenten.

(geometrische) **Eigenschaften des Vektorprodukts**:

- $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$,
- $0 \overset{!}{=} \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = u_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2 (u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1)$
  sowie $0 = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ (denn $\vec{u} \to \vec{v}$, $\vec{v} \to \vec{u}$ oben, antisym.) (falls $\neq 0$!)
  $\Rightarrow$ $(\vec{u} \times \vec{v})$ ist senkrecht zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$, d. h. zur von $\vec{u}$ u. $\vec{v}$ aufgespannten Ebene (rechtshändig),

  $\rightarrow$ Figur 2 (Normale und Winkel von/zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$.)
- Flächenbestimmung:

$$
\begin{aligned}
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 \\
&= \ldots = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \left(1 - \cos^2 \theta\right)\,, \\
\Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| &= |\vec{u}||\vec{v}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = |\vec{u}||\vec{v}||\sin \theta|
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

= Fläche des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms.

→ Figur 3 (Parallelogramm $\vec{u}$, $\vec{v}$, θ.)

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y) && \Rightarrow |\vec{u}|^2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \\
\vec{v} &= \vec{e}_z && \Rightarrow |\vec{v}|^2 = 1 \\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= 0 && \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \text{spannen Einheitsquadrat auf} \\
\vec{u}\times\vec{v} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)\times\vec{e}_z = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_y + \vec{e}_x) && |\cdot\vec{u} = 0 \\
& && |\cdot\vec{v} = 0 \\
|\vec{u}\times\vec{v}|^2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 && \text{Fläche} = 1
\end{aligned}$$

Außerdem gilt, dass diese $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}\}$ eine neue ON Basis bilden.

- $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$, wenn:

$$\begin{aligned}
&\vec{u} \parallel \vec{v} \\
&\Rightarrow \vec{v} = |\vec{v}|\,(\pm 1)\,\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \\
&\Rightarrow (\vec{u}\times\vec{v})_i = \sum_{j,k} \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\text{anti}-} \underbrace{u_j u_k}_{sym.} (\pm 1)\,\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \\
&(\text{oder mit: } \theta = 0,\ \pi)
\end{aligned}$$

$$\text{Kombinationen von} \begin{cases} \text{Skalarprodukt und Vektorprodukt ?} \\ \text{Vektorprodukt und Vektorprodukt ?} \end{cases}$$

Spatprodukt: $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ $\qquad V \times V \times V \to K$

- Zyklizytät $\quad \stackrel{1)}{=} \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) \quad \stackrel{2)}{=} \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ denn:

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) &= \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j,k}^{n} \epsilon_{ijk} v_j w_k \\
&\text{Idee: } \epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} \text{ , endliche Summen können immer umgeordnet werden} \\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{k,i}^{n} \epsilon_{jki} w_k u_i \qquad 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} w_k \sum_{i,j}^{n} \epsilon_{kij} u_i v_j \qquad 2)
\end{aligned}$$

(Später: schreibe Spatprodukt mit Determinante)

- es gibt weitere Identitäten bei anti-zyklischer Vertauschung von $(\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{w} \times \vec{v})$
- "Vertauschbarkeit" $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \overset{!}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$,
  denn: 2) oben, Skalarprodukt ist kommut. $= \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
- Volumenbestimmung
  Volumen = Fläche $\times$ Höhe
  Höhe = $\cos\theta \cdot |\vec{u}|$ $\rightarrow$ Figur 4, Parallelepiped (= Spat)
  $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = \cos\theta |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}|$
- das von $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ aufgespannte Spatvolumen ist $\neq 0$
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sind linear unabhängig
  (denn alle wechselseitigen Kreuzprodukte müssen $\neq 0$ sein)

Weitere Eigenschaften des Vektor- und Skalarproduktes:

- Graßmann-Identität

$$\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w} \tag{1.12}$$

  (Beweis $\rightarrow$ Übung)

- Lagrange-Identität

$$(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 \times \vec{v}_1) \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{v}_2) - (\vec{u}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{v}_1) \tag{1.13}$$

  (Beweis $\rightarrow$ Übung)

- Jacobi-Identität

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0} \tag{1.14}$$

  (Beweis $\rightarrow$ Übung)

- Aus der Jacobi-Identität folgt, dass das Vektorprodukt i.A. nicht zyklisch ist
  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$, d.h. Klammern sind wichtig!
  Im Gegensatz dazu hatten wir $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

* Wir kommen später auf diese Formeln zurück in der Differential- und Integralrechnung in 3 Dimensionen.

* weitere Multiplikationen von Vektoren die $V \to V$ abbilden (in bel. Dim.): lineare Abbildungen und Matrixmultiplikation

1.2 Matrizen

lineare Abbildung $M : \begin{array}{c} V \to V \\ \vec{v} \to \vec{w} = M(\vec{v}) \end{array}$ auf K-Vektorraum V, wenn gilt

$L\ 1$ $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V: \quad M(\vec{v} + \vec{w}) = M(\vec{v}) + M(\vec{w})\,,$

$L\ 2$ $\forall \vec{v} \in V, \forall a \in K: \quad M(a \cdot \vec{v}) = a \cdot M(\vec{v})\,.$

Darstellung der linearen Abbildung: <u>Matrix</u>

- wähle ON Basis $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\ldots,n}$, so dass $\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_j = v_j \vec{e}_j$

  $\Rightarrow \ \vec{w} = \sum_{k=1}^{n} w_k \vec{e}_k = M(\vec{v}) \overset{L\,1,\,2}{=} \sum_{j=1}^{n} v_j M(\vec{e}_j) \qquad |\vec{e}_i \cdot\,, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$

  $\Rightarrow \ w_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_i M(\vec{e}_j) = M_{ij} v_j$, wobei $\vec{e}_i M(\vec{e}_j) \equiv M_{ij} \in K$, damit Resultat in K und M_{ij} Darstellung von M in Basis $\{\vec{e}_i\}$.

  Beispiele:

  – lineares Gleichungssystem: $\vec{w}$, M gegeben:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} v_1 + \ldots + M_{1n} v_n \\ \vdots \\ M_{i1} v_1 + \ldots + M_{in} v_n \\ \vdots \\ M_{n1} v_1 + \ldots + M_{nn} v_n \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots & M_{1j} & \ldots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i1} & \vdots & \ddots & M_{ij} & \ddots & M_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & M_{nj} & \ldots & M_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{M}_1 \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{M}_i \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{M}_n \cdot \vec{v} \end{pmatrix},$$

  wobei $\vec{M}_i$ der i-te Zeilenvektor ist.

  – Nullmatrix: $0_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$,

– Einheitsmatrix: $\mathbb{1}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $M_{ij} = \delta_{ij}$.

- Im Allgemeinen betrachten wir im folgenden nur quadratische Matrizen $M\,\square$.
- Rechteckige Matrizen (z.B. in der Finanzmathematik) $\left(\updownarrow \begin{array}{l}\text{Zeitreihen} \\ \text{Firmen}\end{array}\right)$

  Beispiele:

  –
$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\text{, also } M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,.$$

  –
$$M \quad - \quad n \times m \;\text{ Matrix: } \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n\,.$$

- Transponierte Matrix: $\left(M^\top\right)_{ij} = M_{ji}$
  (definiert für quadratisches und rechteckiges $M \quad \Rightarrow MM^\top$ quadratisch)
  insbesondere für Vektoren:

$$\begin{aligned} \vec{v} \in V \text{ als } n \times 1 \text{ "Matrix": } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ SpaltenVektor}\,, \\ v^\top = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \text{ Zeilenvektor}\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

- Skalarprodukt als Matrixprodukt:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w_i = \left(v_1, \dots, v_n\right) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v^\top w \qquad \text{Abbildung von } \mathbb{R}^n \to \underset{=K}{\mathbb{R}^1}\,.$$

- Symmetrische Matrix: $\left(M^\top\right)_{ij} = M_{ji} = +M_{ij}$, z.B. $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,
  antisymmetrische Matrix: $\left(M^\top\right)_{ij} = M_{ji} = -M_{ij}$, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

- Operationen von Matrizen: M, N: $V \to V$
  - elementweises Addieren $(M+N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ wichtig: gleiche Dimension
  - mit Skalaren Multiplizieren $(aM)_{ij} = aM_{ij}$
- Hintereinanderausführung: $\vec{v} = N\vec{u}$, $\vec{w} = M\vec{v}$:

$$\begin{array}{rl} \Rightarrow \vec{w} = & M\,(N\vec{u}) \Rightarrow\ w_i = M_{ij}N_{jk}v_k \\ \text{aber i.A.} \neq & N\,(M\vec{u}) \quad (= N_{ij}M_{jk}u_k) \end{array}$$

ist <u>assoziativ</u>
A(BC)=(AB)C
und <u>distributiv</u>
A(B+C)=AB+AC

- Vertauschen von 2 Matrizen: <u>Kommutator</u> $[M,N] = MN - NM$
- Eigenschaften von "$\top$"
  * $\left(M^\top\right)^\top = M$
  * $(M+N)^\top = M^\top + N^\top$
  * $(MN)^\top = N^\top M^\top$ $\quad \left(\text{denn } \begin{array}{rl} \left((MN)^\top\right)_{ij} = & M_{jk}N_{kj} = \left(N^\top\right)_{ik}(M)_{kj} \\ = & \left(N^\top M^\top\right)_{ij} \end{array}\right)$

  $\Rightarrow$ z.B. $MM^\top$ ist symmetrisch
- In der Quantenmechanik brauchen wir Matrizen mit $M_{ij} \in \mathbb{C}$
  $\to$ betrachte $K = \mathbb{C}$ Vektorraum, z.B. $V = \mathbb{C}^n$:
  - <u>konjungierte</u> Matrix $\quad (M^*)_{ij} = (M_{ij})^* \quad$ $*$ komplexe Konjugation
  - <u>adjungierte</u> Matrix $\quad \left(M^\dagger\right)_{ij} = (M_{ij})^\dagger = \left(M^\top\right)^*_{ij} \quad$ $\dagger$ Kreuz (engl.dagger)
  - <u>selbstadjungierte</u> oder <u>hermitesche</u> Matrix $\quad M^\dagger = M$
- wegen $(z^*)^* = z$ hat "$\dagger$" dieselben Eigenschaften wie "$\top$"
  (Notation Mathematik: oft $z^* \to \bar{z}$, $M^\dagger \to M^*$)

Beispiel:
die Pauli-Matrizen sind hermitesch:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Funktionen von Matrizen

- viele wichtige Funktionen in der Physik besitzen eine Taylorreihendarstellung, die auf ganz $\mathbb{R}$ (oder sogar $\mathbb{C}$) konvergiert
  Beispiele:

  * $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
  * $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, etc.
    $(e^{ix} = \cos x + i \sin x)$

  Damit definieren wir z.B. $\left(e^M\right)_{ij} \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(M^n\right)_{ij}$,
  wegen $AB \neq BA$ gilt aber i.A. $e^{AB} \neq e^{BA}$ (nicht kommutierende Matrizen)
  oder allgemeiner: $F(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad \Rightarrow \quad F(M) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j M^j$.

- Insbesondere sind einfache Beispiele P_k Polynome vom Grad k:
  $a_j = 0 \quad \forall j > k: \quad P_2(M) = a\mathbb{1} + bM + cM^2$, wobei a, b und c Skalare $\in K$.

Das transponierte $M^\top$ einer Matrix M ist wichtig z.B. bei

Drehungen: lineare Abbildung (gegeben durch Matrixmultiplikation), die das Skalarprodukt invariant läßt (und damit insbesondere die $\underbrace{\text{Norm}}_{=\text{Länge}}$ aller Vektoren!):

$$\begin{aligned}
&\vec{x} \to \vec{x}' = O\,\vec{x} \quad (= Ox \text{ als Spaltenvektor}) \text{ mit} \\
&\vec{x} \cdot \vec{y} \stackrel{!}{=} \vec{x}' \cdot \vec{y}' = (x')^\top y' = (O\,x)^\top (O\,y) = x^\top O^\top O\,y \stackrel{!}{=} x^\top y \\
&\Rightarrow O^\top O = \mathbb{1}\,.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Matrizen, deren inverse Matrix $O^{-1} = O^\top$, heißen orthogonal. Es gilt auch $O\,O^\top = \mathbb{1}$.
(O: orthogonale Transformation)

- für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum, z.B. $\mathbb{C}^n$ läßt sich mit $\vec{u}\,, \quad \vec{v} \in \mathbb{C}^n$: $\vec{u}^* \cdot \vec{v}$ ein (nicht kommutatives) Skalarprodukt definieren, das eine positiv definite Norm hat.
  Dies wird durch folgende lineare Abbildung invariant gelassen:

$$\begin{aligned}
&\vec{u} \to \vec{u}' = U\vec{u}\,, \quad \vec{v} \to \vec{v}' = U\vec{v} \\
&\Rightarrow (\vec{u}')^* \cdot \vec{v}' = (Uu)^{\top *} \cdot Uv = u^{\top *} U^{\top *} U v \stackrel{!}{=} u^{\top *} v \\
&\Rightarrow U^\dagger U = \mathbb{1}\,,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

solche Matrizen heißen unitär. Es gilt auch $UU^\dagger = \mathbb{1}$.
(U: unitäre Transformation)

Drehung der Basis
Sei $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ eine ON Basis: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
$\Rightarrow \quad \vec{e}_i' = O\vec{e}_i$ bildet eine neue ON Basis da $\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = \delta_{ij}$, wenn O orthogonal ist $O^\top O = \mathbb{1}$, und da $1 = |\vec{e}_i| = |\vec{e}_i'|$.
Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$ mit kanonischer Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$: Drehung um

$$\underbrace{D_{z,\phi} = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & -\mathrm{s} & 0 \\ \mathrm{s} & \mathrm{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{z\text{-Achse}} \quad \underbrace{D_{y,\phi} = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & 0 & -\mathrm{s} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{s} & 0 & \mathrm{c} \end{pmatrix}}_{y\text{-Achse}} \quad \underbrace{D_{x,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c} & -\mathrm{s} \\ 0 & \mathrm{s} & \mathrm{c} \end{pmatrix}}_{x\text{-Achse}} \tag{1.19}$$

um Winkel ϕ im positiven Sinn, $\mathrm{c} = \cos\phi$, $\mathrm{s} = \sin\phi$.
Abbildungen von Matrizen in den Körper K:

Spur (Sp) einer Matrix (engl. trace (tr)), M $n \times n$ Matrix:

$$\mathrm{Sp}M = \sum_{i=1}^{n} M_{ii} = M_{ii} \quad \underline{\text{Summe der Diagonalelemente.}} \tag{1.20}$$

Es gilt:

* $\mathrm{Sp}\left(M^\top\right) = \mathrm{Sp}M$ ($\top$ "spiegelt" M an der Diagonalen, die Diagonale ist invariant) $\left(= \left(M^\top\right)_{ii} = M_{ii}\right)$

* $\mathrm{Sp}\,(MN) = \mathrm{Sp}\,(NM)$ für M, N $n \times n$ Matrizen
  (denn $\mathrm{Sp}\,(MN) = M_{ik}N_{ki} = N_{ki}M_{ik} = \mathrm{Sp}\,(NM)$)
  $\Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\,(LMN) = \mathrm{Sp}\,(MNL) = \mathrm{Sp}\,(NLM)$

* Die Spur ist invariant unter einer orthogonalen Transformation der Basis:

- $\vec{e}_i' = O\vec{e}_i$, welche Komponenten hat $\vec{v} = v_i\vec{e}_i$ in der neuen Basis?

-

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_i\vec{e}_i = v_i'\vec{e}_i' \qquad (\vec{v} \text{ wird nicht gedreht, nur die Basis}) \\ \Rightarrow \ v_i' &= \vec{e}_i' \cdot \vec{v} = (Oe_i)^\top v = e_i^\top 0^\top v = \left(O^\top v\right)_i \\ \Leftrightarrow \ \underline{v_i'} &= O_{ik}^\top v_k = \underline{O_{ki}v_k} \end{aligned} \tag{1.21}$$

- Matrixelemente in alter Basis: $M_{ij} = \vec{e}_i M \vec{e}_j$
  in neuer Basis:

$$\begin{aligned} M'_{ij} =& \vec{e}'_i \cdot M \cdot \vec{e}'_j = (Oe_i)^\top MOe_j = \vec{e}_i \left(O^\top MO\right) \vec{e}_j = \left(O^\top MO\right)_{ij} \\ \Leftrightarrow \quad \underline{M'_{ij}} =& O^\top_{ik} M_{kl} O_{lj} = \underline{O_{ki} O_{lj} M_{kl}} \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\,(M') = \mathrm{Sp}\left(O^\top MO\right) = \mathrm{Sp}\left(\underbrace{O^\top O}_{=\mathbb{1}} M\right) = \mathrm{Sp}\,(M)$$

- dito für unitäre Trafos.

Tensoren: Verallgemeinerung von Vektoren, MAtrizen, definiert durch Trafo:
$T_{i_1,\ldots,i_k}$ ist ein Tensor k-ter Stufe, wenn er wie folgt unter O orthog. transformiert:

$$T'_{i_1,\ldots,i_k} = O_{l_1 i_1} \ldots O_{l_k i_k} T_{l_1,\ldots,l_k} \,. \tag{1.23}$$

Beispiele:

	Skalar $a \in K$	Vektor v_i	Matrix M_{ij}	ϵ_{ijk}-Tensor
Tensor	0-ter Stufe	1-ter Stufe	2-ter Stufe	3-ter Stufe

R_{ijkl} Riemann-Tensor $\rightarrow$ Allgemeine Relativitätstheorie
Tensor 4-ter Stufe

Determinante einer quadratischer $n \times n$ Matrix M: $\det(M) \in K$.

- Um det zu definieren schreiben wir M ausgedrückt durch n Spaltenvektoren:
  $$M = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ m_1 & m_2 & ,\ldots, & m_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$
- Die Determinante von M ist durch folgende Eigenschaften definiert [K. Weierstraß]:

  D 1 det (M) ist linear in jeder Spalte:

  a) $$\det\left(m_1,\ldots,m_j = m'_j + m''_j,\ldots,m_n\right) = \begin{array}{l}\det\left(m_1,\ldots,m'_j,\ldots,m_n\right) \\ +\det\left(m_1,\ldots,m''_j,\ldots,m_n\right)\end{array},$$

  sowie

  b) $\det(m_1,\ldots,\alpha m_j,\ldots,m_n) = \alpha \det(m_1,\ldots,m_j,\ldots,m_n)$ für $\alpha \in K$,

  D 2 det (M) ist alternierend, d.h. $\det M = 0$ falls 2 Spalten gleich:
  $$\det\left(m_1,\ldots,\underset{i-\mathrm{te}}{m_i},\ldots,\underset{j-\mathrm{te}}{m_i},\ldots,m_n\right) = 0\,,$$

$D\,3$ $\underline{\det(M) \text{ ist normiert}}$, d.h. für die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_{n\times n}$ gilt:
$\overline{1 = \det(\mathbb{1}_{n\times n}) \quad (=}\det(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ für $\{\vec{e}_i\}$ die kanonische ON Basis).

* Aus $D\,1$ folgt, dass sich 2 Matrizen, die sich in <u>genau einer</u> Spalte unterscheiden addieren lassen.
Im Allgemeinen gilt aber $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$, für A, B beliebige $n \times n$ Matrizen.

- Die folgenden Eigenschaften von det folgen aus $D\,1$ - $D\,3$,
für alle Beweise siehe z.B. Gerd Fischer, *Lineare Algebra*.

* Für M $n\times n$, $\alpha \in K$ gilt $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{punktweise mult.} \\ \text{aller Matrix-Elemente}}}{\det(\alpha M)} = \alpha^n \det(M)$.

* Für $M = (m_1, ..., m_n)$ mit $\exists i$: $m_i = \vec{0}$ gilt $\det(M) = 0$.

* $\det(m_1, ..., m_i, ..., m_j, ..., m_n) = \det(m_1, ..., \underset{i-\text{te}}{m_j}, ..., \underset{j-\text{te}}{m_i}, ..., m_n)$

* det ist invariant unter Addition von Spalten mit $i \neq j$:
$\det(m_1, ..., \underset{i-\text{te}}{m_i + \alpha\, m_j}, ..., m_j, ..., m_n) = \det(m_1, ..., m_i, ..., m_j, ..., m_n)$.

* Ist M eine obere Dreiecksmatrix $M = \begin{pmatrix} x_1 & - & \\ & \ddots & | \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}$, so gilt: $\det(M) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$

Satz: Die Determinante exisitiert und ist eindeutig, und es gilt für

$$\det(M_{ij}) = \underset{\substack{\sigma \\ \uparrow \text{ alle Permutationen}}}{\sum} \text{sign}(\sigma) M_{1\sigma(1)} \cdot ... \cdot M_{n\sigma(n)}\,, \tag{1.24}$$

[G.W. Leibniz].

Permutationen: σ ist eine Permutation von $(1, 2, ..., n) \to (\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)) \equiv (i_1, i_2, ..., i_n)$

- <u>σ ist gerade</u> (symmetrisch), wenn sie aus einer geraden Anzahl von Paarvertauschungen besteht $\Rightarrow \text{sign}(\sigma) = +1$

- <u>σ ist ungerade</u> (antisymmetrisch), wenn sie aus einer ungeraden Anzahl von Paarvertauschungen besteht $\Rightarrow \text{sign}(\sigma) = -1$

- Wir können sign (Permutationen) mit dem Levi-Cevita-Symbol schreiben (total anti-sym. Tensor n-ter Stufe):

$$\epsilon_{i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} +1 & \sigma \text{ gerade Permutation} \\ -1 & \sigma \text{ ungerade Permutation} \\ 0 & \text{2 oder mehrere Indizes gleich (also \underline{keine} Permutation)} \end{cases} \tag{1.25}$$

$$\Rightarrow \det\left(M_{ij}\right) = \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n}\right) \epsilon_{i_1 \ldots i_n} M_{1i_1} \ldots M_{ni_n} \tag{1.26}$$

Beispiel $n = 2$:

$\exists\ n! = 2$ Permutationen $\begin{array}{ll} (1,2) \to (1,2) & \text{Identität, gerade (0 Paar vertauscht.)} \\ (1,2) \to (2,1) & \text{ungerade (1 Paar vertauscht)} \end{array}$

$\Rightarrow\ \det\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = +M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \underbrace{\epsilon_{12}}_{=1} M_{11}M_{22} + \underbrace{\epsilon_{21}}_{=-1} M_{12}M_{21}$

$(\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0)$

Beispiel $n = 3$:

$\exists\ n! = 3! = 6$ Permutationen, wir kennen ϵ_{ijk} schon (1.10), (zeige, dass es daselbe ist, wie Levi-Cevita.)

$\Rightarrow\ \det(M) = \epsilon_{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k}$,

oder $\det\left(M_{ij}\right) = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} M_{11}M_{22}M_{33} + M_{12}M_{23}M_{31} + M_{13}M_{21}M_{32} \\ -M_{13}M_{22}M_{31} - M_{11}M_{23}M_{32} - M_{12}M_{21}M_{33} \end{array}$

$=$ Sarrussche Regel $\searrow +\ \nearrow -$

- für $n \geq 4$ gibt es keine einfache Regeln mehr

Weitere Eigenschaften für beliebiges n:

* $\det\left(M^\top\right) = \det M$

$$\begin{aligned} \det\left(M^\top\right) &= \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma) M_{\sigma(1)1} \ldots M_{\sigma(n)n} && \hookleftarrow \text{Umordnung} \\ &= \sum_\sigma \operatorname{sign}\left(\sigma^{-1}\right) M_{1\sigma^{-1}(1)} \ldots M_{n\sigma^{-1}(n)} = \det(M)\,, && \text{da } \sigma \to \sigma^{-1} \text{ bijektiv ist} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Alle Eigenschaften von det gelten auch für Zeilenvektoren (inkl. die Definition darüber)

* Multiplikationssatz für Determinanten

$$M\,,\ N\ n \times n\ \Rightarrow \det(M \cdot N) = \det(M)\det(N) \tag{1.27}$$

$\Rightarrow$ Reihenfolge der Matrizen in der det egal
Insbesondere folgt $= \det(N \cdot M)$

und für invertierbares M:

$$\exists\, M^{-1} \,:\, MM^{-1} = \mathbb{1} \;\Rightarrow\; \det\left(M^{-1}\right) = \frac{1}{\det(M)} \;\left(= (\det(M))^{-1}\right) \tag{1.28}$$

$$\text{denn:} \quad M = \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 & \ldots & m_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} | \\ m_1 \\ | \end{matrix} = M_{j1} \quad \text{etc.}$$

$$\text{dito} \quad N = \begin{pmatrix} | & & | \\ n_1 & \ldots & n_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} | \\ n_i \\ | \end{matrix} = N_{ji} \quad \text{etc.}$$

$$(M \cdot N)_{ij} = M_{ik} N_{kj} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ M_{ik_1} N_{k_1 1} & M_{ik_2} N_{k_2 1} & \ldots & M_{ik_n} N_{k_n 1} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Linearkombination von Vektoren $\begin{matrix} | \\ m_{kn} \\ | \end{matrix} \uparrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\; \det(M \cdot N) &\underset{\text{det Linear}}{=} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} \det\left(m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n}\right) N_{i_1 1} \ldots N_{i_n n} \\ &\underset{\text{det antisym.}}{=} \sum_{i_1, \ldots, i_n} \epsilon_{i_1 \ldots i_n} \det\left(m_1, \ldots, m_n\right) N_{i_1 1} \ldots N_{i_n n} \\ &= \det(M) \cdot \det(N) \end{aligned}$$

- wie schon die Spur ist auch die Determinante invariant unter Orthogonalen (und unitären) Transformationen:

$$\begin{matrix} M' = O^\top M O \\ \text{mit } O^\top O = \mathbb{1} \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} \det(M') &= \det\left(O^\top M O\right) \\ &= \det\left(\underbrace{O^\top O}_{=\mathbb{1}} M\right) = \det(M) \end{aligned}$$

dito für $M' = U^\dagger M U$ mit $U^\dagger U = \mathbb{1}$.
(oder sogar für jede Ähnlichkeits-trafo $M' = P^{-1} M P$ mit $P^{-1} P = \mathbb{1}_{n \times n}$)

Eigenschaften von inversen Matrizen:
Falls es für eine $n \times n$ Matrix M eine $n \times n$ Matrix N gibt mit $NM = \mathbb{1}_{n \times n}$, dann ist $N \equiv M^{-1}$ die inverse Matrix zu M. M heißt dann nicht singulär, regulär oder invertierbar.

* es gilt $MN = \mathbb{1}_{n \times n}$ (Rechtsinverse = Linksinverse)

(denn: $w = Mv \;\Rightarrow\; Nw = NMv = v \;\Rightarrow\; w = Mv = MNw$
$\Rightarrow\; (MN)_{ij} = \delta_{ij}$ oder $MN = \mathbb{1}_{n\times n}$)

* wenn M^{-1} exisitiert, ist dies eindeutig
(denn: seien N, N' beides inverse, so gilt:
$N' = N'\mathbb{1}_{n\times n} = N'(MN) = \mathbb{1}_{n\times n}N = N$)

* $\boxed{(M^{-1})^{-1} = M}$ (denn $MM^{-1} = \mathbb{1}_{n\times n}$ also $M = (M^{-1})^{-1}$)

* $\boxed{(M_1M_2)^{-1} = M_2^{-1}M_1^{-1}}$ (vertauscht die Ordnung wie $\top$, $\dagger$)
(denn: $M_2^{-1}M_1^{-1}M_1M_2 = M_2^{-1}M_2 = \mathbb{1}_{n\times n}$, also $M_2^{-1}M_1^{-1} = (M_1M_2)^{-1}$)

- wir kennen Beispiele für reguläre Matrizen bereits:

$$\begin{array}{rlll} \text{orthogonal } \sim, & \text{mit } O^\top O = \mathbb{1}_{n\times n}\,, & \text{d.h. } O^\top = O^{-1} & \Rightarrow\; OO^\top = \mathbb{1} \\ \text{unitär } \sim, & \text{mit } U^\dagger U = \mathbb{1}_{n\times n}\,, & \text{d.h. } U^\dagger = U^{-1} & \Rightarrow\; UU^\dagger = \mathbb{1} \end{array}$$

- *Beispiel* dafür, dass Matrizen zu sich selbst invers sein können (und $\neq \mathbb{1}_{n\times n}$ selbst sind):
$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{n\times n}$, d.h. $\sigma_x^{-1} = \sigma_x$
dasselbe gilt für σ_y und σ_z

- Wie findet man die inverse einer Matrix (wenn sie existiert)?
Dies hängt eng mit der allgemeinen Berechnung von Determinanten zusammen!

Berechnung von Determinanten für allgemeine Dimension

1. Laplacescher Entwicklungssatz M $n \times n$ Matrix
   a) Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} M_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} \det\left(\hat{M}_{ij}\right)}_{\equiv\text{Kofaktor: cof}(M)_{ij}}\,, \tag{1.29}$$

wobei $\hat{M}$ wie M ohne i-te Zeile und ohne j-te Spalte ist, d.h. $(n-1) \times (n-1)$ Matrix.

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & \cancel{M_{1j}} \dots & M_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \cancel{M_{i1}} & \dots & \cancel{M_{ij}} & \dots \;\cancel{M_{in}} \\ \vdots & & & \vdots \\ M_{n1} & \dots & \cancel{M_{in}} \dots & M_{nn} \end{pmatrix}\;;\; (-1)^{i+j} =$$

+	−	+	−	
−	+	−	+	
+	−	+		
			+	
				+

Spezialfall einer $\begin{array}{ll} \underline{\text{Hankel}}\text{matrix} & A_{ij} = A_{i+j} \\ \underline{\text{Toeplitz}}\text{matrix} & B_{ij} = B_{i-j} \end{array}$

b) Entwicklung nach <u>i-ten Zeile</u>:

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} (-1)^{i+j} \det\left(\hat{M}_{ij}\right) , \tag{1.30}$$

$$\left(\begin{aligned} \text{denn aus Def.:} \quad \det M &= \sum_{i_1,\dots,i_n} \epsilon_{i_1\dots i_n} M_{1i_1} \dots M_{ni_n} \\ &= \sum_{i_i=1}^{n} M_{ii_i} \underbrace{\sum_{i_1,\dots,\cancel{i_i},\dots,i_n} \underbrace{\epsilon_{i_1\dots i_n}}_{\pm 1\, \epsilon_{i_1\dots\cancel{i_i}\dots i_n}} M_{1i_1} \dots \cancel{M_{ii_i}} \dots M_{ni_n}}_{\pm \det \hat{M}_{ij}} \end{aligned} \right)$$

a) $\Rightarrow$ b) durch $\top$

Beispiel:

- wähle immer Zeile (Spalte) mit vielen Nullen:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \boxed{0} \end{vmatrix} = \begin{cases} +0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 27 \\[2em] +0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 27 \end{cases}$$

c) Entwicklung nach <u>Blöcken</u>:
entwickle $n \times n$ Matrix nach $m \times m$ Unterblöcken $(m < n)$

– es gibt $N = \binom{n}{m}$ Möglichkeiten Unterblöcke zu wählen:

$$\det M = \sum_{j=1}^{N} \epsilon_\rho \det B_j \det C_j , \tag{1.31}$$

wobei $\begin{array}{ll} \epsilon_\rho & \begin{array}{c} \text{Vorzeichen} \\ \text{um Zeilen von } B \text{ in diese Reihenfolge zu bringen} \end{array} \\ \det C_j & \begin{array}{c} \text{Komplementäre Matrix: } M \\ \text{nach Streichung der Zeilen und Spalten von } B \end{array} \end{array}$

Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \text{ in } 2\times 2 \text{ Blöcke: } \binom{4}{2} = \tfrac{4!}{(4-2)!2!} = \tfrac{24}{2\cdot 2} = 6$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det M = &+ \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}\begin{vmatrix} k & l \\ o & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix}\begin{vmatrix} j & l \\ n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix}\begin{vmatrix} j & k \\ n & o \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix}\begin{vmatrix} i & l \\ m & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & d \\ f & h \end{vmatrix}\begin{vmatrix} i & k \\ m & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix}\begin{vmatrix} i & j \\ m & n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2. Gaußscher Algorithmus (sehr effektiv für $n \geq 4$)
   Idee: bringe Matrix M durch Zeilen- (oder Spalten-) umformungen auf obere Dreiecksmatrix-Form, ändert nicht , aber dann $\det M$ = Produkt der Diagonalelemente:
   Beispiel:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{7}{2}) \\ \leftarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{16-7}{2} \end{vmatrix} \\ = 3 \cdot 2 \cdot \frac{9}{2} = 27 \end{aligned}$$

Anwendung Blockmatrizen

- gegeben A, B, C, D $n \times n$ Matrizen

  $$\boxed{\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(D) = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}}$$

  (denn: Laplaceentwicklung nach Blöcken)

- für A regulär ($\exists\, A^{-1}$) gilt:

  $$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det\left(D - CA^{-1}B\right)}$$

  (denn: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$, benutze $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ sowie Eigenschaften oben)

- außer der Spur und der Determinante gibt es weitere Abb. $M \to K$ Körper

* für A $2n \times 2n$ antisymmetrisch deiniere die
Pfaffsche Determinante (engl. Pfaffian):

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}(A) =& \frac{1}{2^n n!}\epsilon_{i_1 \ldots i_{2n}} A_{i_1 i_2} \ldots A_{i_{2n-1} i_{2n}} \\ (\text{vgl. } \det(A) =& \quad \epsilon_{i_1 \ldots i_{2n}} A_{1\, i_1} A_{2\, i_2} \ldots A_{2n\, i_{2n}})\end{aligned}$$

und es gilt $\boxed{(\mathrm{Pf}(A))^2 = \det(A)}$.

Anwendung: $\mathrm{Pf}A \; ''='' \; \det\tilde{A}$, $\tilde{A}$ $n \times n$ Matrix mit $\tilde{A}_{ij}$ Quaternionen, Majorana-Fermionen

Bestimmung der Inversen einer Matrix (falls diese existiert!)

- brauchen <u>$\det M$ und Kofaktor-Matrix</u> $(-1)^{i+j}\det\hat{M}_{ij}$ dazu:

$$\det M = \sum_{j_1,\ldots,j_i,\ldots,j_n} \epsilon_{j_1 \ldots j_n} M_{1 j_1} \ldots \underbrace{M_{i j_i}}_{i-\text{te}} \ldots M_{n j_n}$$

betrachte für $k \neq i$ für festes i

$$f_i(k) = \sum_{j_1,\ldots,j_n} \underbrace{\epsilon_{j_1 \ldots j_n}}_{\text{antisymm. u. Vert.}} \overset{\text{Argument } k \downarrow\downarrow \text{ Index } i}{M_{1 j_1} \ldots M_{k j_i} \ldots M_{k j_k} \ldots M_{n j_n}} = 0$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$

symm. u. Vert. v. j_i und j_k

für $f_i(i) = \det M$, d.h. $f_i(k) = \delta_{ki} \det M$

$$= \sum_{j_i=1}^{n} M_{k j_i} \underbrace{\sum_{j_1,\ldots,\cancel{j_i},\ldots,j_n} \epsilon_{j_1 \ldots j_n} M_{1 j_1} \ldots \cancel{M_{i j_i}} \ldots M_{n j_n}}_{= (\mathrm{adj} M)_{j_i i} = (\mathrm{Cof}\,(M))_{i j_i}}, \qquad \text{siehe (1.29)}$$

$$\text{Adjunkte} = (\text{Kofaktor})^\top$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j_i=1}^{n} M_{k j_i} \,(\mathrm{adj} M)_{j_i i} = (\mathbb{1}_{n \times n})_{ki} \det M$$

$\Rightarrow$ haben inverse Matrix $\uparrow$ zu M falls $\det M \neq 0$.

Satz: $\det M \neq 0 \;\Leftrightarrow\; M$ ist regulär, d.h. besitzt M^{-1}:
"$\Rightarrow$" $\det M \neq 0$

$$\Rightarrow\; M^{-1} = \frac{\mathrm{adj} M}{\det M}$$

"$\Leftarrow$" $\exists\, M^{-1} :\; MM^{-1} = \mathbb{1}$:

$$\Rightarrow\; \det\left(MM^{-1}\right) = \det M \cdot \det M^{-1} = 1$$

da M^{-1} exisitiert, ist $\det M^{-1} < \infty \;\Rightarrow\; \det M \neq 0\,.$

Beispiel: $n = 2$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = ad - bc \overset{!}{\neq} 0$ $\begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline - & + \\ \hline \end{array}$

$\Rightarrow\; \mathrm{cof}(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{adj}(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\; M^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad \text{check!}$$

Matrix-Inversion durch Gauß-Jordan Verfahren

- dient auch zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

$$\begin{aligned} Mv = w = \mathbb{1}w\,,\; \det M \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists\, M^{-1} : \quad M^{-1}Mv = v = M^{-1}w \\ \Leftrightarrow\; M_{11}v_1 + M_{12}v_1 + \ldots + M_{1n}v_n = w_1 \\ \vdots \\ M_{n1}v_1 + \ldots + M_{nn}v_n = w_n \end{aligned}$$

* Gleichungssysteme ändern sich nicht, wenn wir:

  - Gleichungen vertauschen,
  - Gleichungen mit einer konstanten $c \neq 0$ multiplizieren,
  - Linearkombinationen von Gleichungen bilden.

  Beginne mit der 1. Spalte, o.B.d.A. $M_{11} \neq 0$

  - teile 1. Gl. durch M_{11}
  - Subtrahiere $M_{j1}\cdot$ 1. Gl. von den übrigen Gleichungen

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 1v_1 + ... \\ 0v_1 + M'_{22}v_2 \\ \vdots \\ 0v_1 + \end{array}$$

– wähle die 2. Spalte, o.B.d.A. $M'_{22} \neq 0$, normiere durch Gl.$\cdot 1/M'_{22}$, usw

* wir machen dieselben Umformungen auf der rechten Seite mit $\mathbb{1}$
$\Rightarrow$ am Ende $\mathbb{1}v = M^{-1}w$.
(Diese Umformungen lassen sich auch durch Matrixmult. darstellen.)

$$\begin{array}{rcc|cc} M = & \multicolumn{2}{c|}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2}\cdot & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline -\mathrm{I} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \hline & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2\cdot & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & -3 \\ & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

$$\text{check: } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anwendung lineare Gleichungssysteme:

$$\text{es gilt} \quad \begin{array}{c} M \text{ ist regulär} \\ \text{d.h. } \exists\, M^{-1} \\ \text{d.h. } \det M \neq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{das lin. Gleichungssystem} \\ M\,v = 0 \\ \text{hat nur die triviale Lsg: } v = 0 \end{array}$$

(denn $\Rightarrow\ \exists\, M^{-1}$, mult. $M\,v = 0\ \Rightarrow\ M^{-1}M\,v = v = 0$
"$\Leftarrow$" müssen Injektivität zeigen: sei $w = M\,v$, dann ist v eindeutig:
Annahme $\exists\, v_{1,2}$ mit $w = M\,v_1 = M\,v_2\ \Rightarrow\ M\,(v_1 - v_2) = 0\ \Rightarrow\ v_1 - v_2 = 0$)

Konsequenz: Das lineare Gleichungssystem $M\,v = w$ hat eine eindeutige Lösung $v = M^{-1}w$ genau dann, wenn $\det M \neq 0$

* Falss $\det M = 0$ gibt es nicht triviale Lösungen v_a mit $M\,v_a = 0$. Also können wir zu einer speziellen Lösung v_s mit $M\,v_s = w$ bel. Linearkomb. der v_a addieren:
Lösung $v = \sum_a c_a v_a + v_s$ (wie bei lin. Diff. gl.).

Anwendung lineare Unabhängigkeit

- die Menge von n Vektoren $\vec{m}_{i=1,...,n}$ in einem V K-Vektorraum mit $\dim V = n$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $\det(m_1, m_2, ..., m_n) \neq 0$.

  (denn lin. unabh.: $\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{m}_i = \vec{0}$ hat nur die triviale Lsg.: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{0}$

  $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 & \dots & m_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{0}$, mit obigen Satz ist dies equiv. zu det($\;$) $\neq 0$)

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

I.A. verändert die lineare Abb. M den Vektor auf den sie angewendet wird $M\,\vec{v} = \vec{w}$ mit $\vec{w} \neq \vec{v}$ (z.B. bei Drehungen). Es gibt besondere Vektoren, die in sich selbst übergehen (z.B. die Drehachse), diese charakterisieren M.

- Sei M eine Matrix, die auf den K-Vektorraum V wirkt.
  Gibt es ein $\lambda \in K$ und ein $\vec{v} \in V$ mit $\underline{\vec{v} \neq \vec{0}}$, so dass $\boxed{M\,\vec{v} = \lambda \vec{v}}$,
  so heißen $\underline{\lambda \text{ Eigenwert von } M}$, $\underline{\vec{v} \text{ Eigenvektor von } M}$ mit Eigenwert λ.

* Der Eigenwert $\lambda = 0$ kann vorkommen:
  $\exists\, \vec{v} \neq \vec{0} \;:\; M\,\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = 0$ ($\Rightarrow$ $\det M = 0$), aber der Nullvektor ist kein Eigenvektor!

* ein Eigenvektor ist nicht eindeutig bestimmt:
  für $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ ist auch $\alpha \cdot \vec{v}$ Eigenvektor ($\alpha M \vec{v} = \alpha \lambda \vec{v}$)

  Beispiele $M = \mathbb{1} \;\Rightarrow\; \lambda = 1$ ist Eigenwert $\forall\, \vec{v} \in V$
  insbesondere für alle n linear unabhängige Basisvektoren

* Wir hatten bereits folgende Equivalenzen gesehen:

  i) M ist regulär
  ii) $\det M \neq 0$
  iii) die Spalten (Zeilen) von M sind linear unabh.
  iv) $M\,\vec{v} = 0$ hat nur die Lösung $\vec{v} = \vec{0}$

  zusätzlich gelten als equivalent:

  v) $M\,\vec{v}_1 = M\,\vec{v}_2 \;\Rightarrow\; \vec{v}_1 = \vec{v}_2$
  vi) alle Eigenwerte λ_i von M sind $\neq 0$

(denn iv) $M\,\vec{v} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{v} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \nexists\,\vec{v} \neq \vec{0}$ mit $M\,\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ vi))

Wie bestimmen wir Eigenwerte und Eigenvektoren?
Suche $M\,\vec{v} = \lambda\vec{v}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$
$\Leftrightarrow\;(M - \lambda\mathbb{1})\,\vec{v} = \vec{0}\,,\;\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\Leftrightarrow\; \det\underbrace{(M - \lambda\mathbb{1})}_{M_{ij} - \lambda\delta_{ij}} = 0 \tag{1.32}$$

* für einen n-dim. Vektorraum V ist:

$$\underset{\in K}{P_n}(\lambda) \equiv \det(M - \lambda\mathbb{1}) = \det(m_1 - \lambda\vec{e}_1, ..., m_n - \lambda\vec{e}_n) \tag{1.33}$$

  ein Polynom in λ von Grad n und heißt charakteristisches Polynom (schreibe und multipliziere det aus)

* $\rightarrow$ wir wollen die Säkulargleichung $\boxed{P_n(\lambda) = 0}$ lösen

* Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom von Grad n $P_n(\lambda)$ mit reellen (o. komplexen) Koeffizienten hat genau n Nullstellen $\lambda_i \in \underline{\underline{\mathbb{C}}}$.
  hier $P_n(\lambda) = (-1)^n\,(\lambda - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_n)$, λ_i nicht notwendig verschieden

$\rightarrow$ damit wir alle Lösungen von $P_n(\lambda) = 0$ als Eigenwerte nutzen können, betrachten wir nun i.A. $K = \mathbb{C}$.
(eine Matrix M mit $M_{kl} \in \mathbb{R}$ kann komplexe Lsg. λ_i haben,
obwohl $\det(M - \lambda) = P_n(\lambda) \in \mathbb{R}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$)

* zu gegebenen λ_i können wir dann Eigenvektoren $\vec{v}_i$ finden mit $(M - \lambda_i\mathbb{1})\,\vec{v}_i = 0$
  Normiere diese zur Länge $1 = |\vec{v}_i| \;=\; \left(\underset{\text{kompl. Skalarprod.}}{v_i^* v_i = v_i^\dagger v_i}\right)$

Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \det(M - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow\; \lambda_1 = +i\sqrt{2}\,,\; \lambda_2 = -i\sqrt{2}\,,\; M$ hat keine reellen Eigenwerte!

$$(M - i\mathbb{1}\sqrt{2})\vec{v}_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 \\ -2 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iv_1\sqrt{2} + v_2 \\ -2v_1 - iv_2\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow\; v_2 = i\sqrt{2}v_1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Normierung: $|\vec{v}|^2 = 1 \cdot 1 + i(-i)2 = 3$

$$(M-(-i)\mathbb{1}\sqrt{2})\vec{v}_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & 1 \\ -2 & i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iw_1\sqrt{2}+w_2 \\ -2w_1+iw_2\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow\; w_2 = -i\sqrt{2}w_1 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ ist normiert.}$$

"Skalarprodukt" hier $\vec{v}_1^\dagger \cdot \vec{v}_2 = (v_1^*, v_2^*) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \left(1\cdot 1 + i \cdot i\sqrt{2}^2\right)\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ sind linear unabh.

ist das immer so?

* Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ $(\neq \vec{0})$ mit Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind linear unabh.:
sei $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{0}$, $\qquad M\cdot,\ \lambda_1\cdot,\ \lambda_2\cdot$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_1\lambda_1\vec{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{v}_2 &= \vec{0} \\ \lambda_1(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) &= \vec{0} \\ \lambda_2(\qquad\qquad) &= \vec{0} \end{aligned} \quad \overset{I-II}{\Rightarrow} \quad \begin{aligned} &\alpha_2 \underbrace{(\lambda_2-\lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{\vec{v}_2}_{\neq\vec{0}} = \vec{0} \\ &\text{dito für } \alpha_1 \end{aligned}$$

* es gilt sogar: $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\}$ Eigenvektoren mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ sind paarweise lin. unabh. (Beweis mit Induktion), so dass für $\dim V = m$ gilt: wenn $m = n$ bilden eine Basis.

* Es ist equivalent:

i) $\exists$ Basis von V aus Eigenvektoren von M

ii) $\exists$ Basis von V in der $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, d.h. $M_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$ (keine Summe)

Matrizen M für die dies gilt, heißen diagonalisierbar.

Eigenschaften der Eigenwerte und des charakteristischen Polynoms

*

$$\det(M) = \lambda_1 ... \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{1.34}$$

det von M ist das Produkt ihrer Eigenwerte

(denn: $\begin{aligned} P_n(\lambda) = &\det(M - \lambda\mathbb{1}_{n\times n}) = \det \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 - \lambda e_1 & ... & m_n - \lambda e_n \\ | & & | \end{pmatrix} \\ = &(-)^n(\lambda-\lambda_1)...(\lambda-\lambda_n) \end{aligned}$

$\to$ nehme auf beiden Seiten nur die Terme der Ordnung λ^0 (setze $\lambda = 0$)

$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 & ... & m_n \\ | & & | \end{pmatrix} = (-)^n(-\lambda_1)...(-\lambda_n) = \lambda_1...\lambda_n \qquad)$

*

$$\mathrm{Sp}M = \lambda_1 + ... + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{1.35}$$

Spur von M ist die Summe ihrer Eigenwerte

(denn: benutze Linearität von det in $P_n(\lambda)$ und betrachte Terme der Ordnung λ^{n-1} in $P_n(\lambda)$:

$(-\lambda)^{n-1}\left[\det\begin{pmatrix} | & & & \\ m_1, & e_2, & ..., & e_n \\ | & & & \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & | & & \\ e_1, & m_2, & ..., & e_n \\ & | & & \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & & & | \\ e_1, & ..., & e_{n-1}, & m_n \\ & & & | \end{pmatrix}\right]$

$= (-)\lambda^{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n} M_{ii} = (-)^{n+1}\lambda^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n) \qquad)$

d.h. es gilt $P_n(\lambda) = (-)^n\left(\lambda^n - \lambda^{n-1}\mathrm{Sp}(M) + ... + \lambda^0 \det(M)\right)$

Beispiel 2×2 (kennen alle Koeffizienten von $P_2(\lambda)$):

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} P_2(\lambda) = &\ \det(M - \lambda \mathbb{1}_{2\times 2}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ = &\ \lambda^2 - \lambda \underbrace{(a+d)}_{\mathrm{Sp}(M)} + \underbrace{ad - bc}_{\det(M)} \end{aligned}$$

* Die Eigenwerte von M vor und nach einer orthogonalen (unitären) Transformation sind dieselben, d.h. sie sind invariant
(denn: $M' = O^\top M O$, $v' = O^\top v$, mit v Eigenvektor $M\,v = \lambda v$
$\Rightarrow\ \underline{M'v'} = O^\top M \underbrace{O O^\top}_{=\mathbb{1}} v = O^\top M\,v = O^\top \lambda v = \lambda v'$
d.h. die transf. Matrix M' hat einen Eigenvektor v' mit demselben Eigenwert λ.
Dasselbe gilt für unitäre Trafos, der Beweis, dass $\vec{e}_i' = U\,\vec{e}_i \ \Rightarrow\ v' = U^\dagger v$ geht genauso wie in (1.21))

Satz von Caley-Hamilton:
Jede $n \times n$ Matrix erfüllt ihre eigene Säkulargleichung

$$P_n(M) = 0_{n\times n} \tag{1.36}$$

(hier ist gemeint: $P_n(\lambda) = \sum\limits_{l=0}^{n} a_l \lambda^l \ \rightarrow$ Polynom einer Matrix M
(nicht $P_n(M) = \det(M - M\mathbb{1}) \in\ K!$)

Idee: führe die Wirkung von $P_n(M)$ auf Eigenvektoren zurück:
Annahme: wir können einen beliebigen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ in eine Basis aus Eigenvektoren darstellen $\vec{v} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \vec{v}_k$, mit $M v_k = \lambda v_k$

$$\Rightarrow \ \forall\, k = 1, ..., n \text{ gilt } P_n(M)\vec{v}_k = \sum_{l=0}^{n} a_l M^l \vec{v}_k = \sum_{l=0}^{n} a_l \lambda_k^l \vec{v}_k = \underbrace{P_n(\lambda_k)}_{=0} \vec{v}_k = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \ P_n(M)\vec{v} = \vec{0} \ \Rightarrow \ \forall\, \vec{v} \in V \quad P_n(M)\vec{v} = \vec{0} \text{ d.h. } P_n(M) = 0_{n\times n}\,)$$

Eigenschaften von Matrizen

* Sei M symmetrisch $M = M^\top$ mit $M_{ij} \in \mathbb{R}$, $^{(\Rightarrow M = M^\dagger)}$ dann gilt:
  i) die Eigenwerte von M sind reell ($\rightarrow$ betrachte M auf $K = \mathbb{R}$-Vektorraum)
  ii) die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

  (denn:
  - zu i) sei $v \in V$ mit $Mv = \lambda v$, betrachte das Skalarprodukt:
    $\left(v^\dagger M v\right)^\dagger = v^\dagger \left(v^\dagger M^\dagger\right)^\dagger = v^\dagger M v = \lambda v^\dagger v$, $v^\dagger v = |\vec{v}|^2 > 0$
    sowie $= \left(v^\dagger \lambda v\right)^\dagger = \lambda^* \left(v^\dagger v\right)^\dagger = \lambda^* v^\dagger v \ \Rightarrow \ \lambda = \lambda^* \in \mathbb{R}$
    Die Kombination $v^\dagger M v$ heißt quadratische Form (auf $\mathbb{R}$: $v^\top M v$).
  - zu ii) Sei $Mv_1 = \lambda_1 v_1$, $Mv_2 = \lambda_2 v_2$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$
    $\Rightarrow \ (Mv_2)^\top = v_2^\top \underbrace{M^\top}_{=M} = \lambda_2 v_2^\top \qquad$ (Spaltenvektor)
    Betrachte $v_2^\top M v_1 = v_2^\top \lambda_1 v_1 = \lambda_2 v_2^\top v_1 \ \Rightarrow \ \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} v_2^\top v_1 = 0$,
    also ist $v_2 \perp v_1$ bzgl. unseres reellen Skalarproduktes.)

* Bei einer orthogonalen Matrix O mit $O_{ij} \in \mathbb{R}$ gilt für alle Eigenwerte $\quad |\lambda_i| = 1$
  $i = 1, ..., n$
  d.h. liegen auf
  dem Einheitskreis

  (denn: sei v Eigenvektor: $Ov = \lambda v \ \overset{\dagger}{\Rightarrow} \ v^\dagger O^\dagger = v^\dagger O^\top = \lambda^* v^\dagger$
  $\Rightarrow \ v^\dagger \underbrace{O^\top O}_{=\mathbb{1}_{n\times n}} v = v^\dagger \lambda^* \lambda v = v^\dagger v = |\vec{v}|^2 > 0$
  $\Rightarrow \ |\lambda|^2 = 1$
  Dasselbe gilt für die Eigenwerte einer unitären Matrix U mit $U_{ij} \in \mathbb{C}$.)

* Sei M hermitesch, $M = M^\dagger$, mit $M_{ij} \in \mathbb{C}$, dann gilt:
  i) die Eigenwerte von M sind reell
  ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal (bzgl. komplexem Skalarprodukt)

  Der Beweis geht wie bei reell-symmtrischen Matrizen, mit komplexen Skalarprodukt in ii).
  In der Quantenmechanik wird die Hamiltonfuntion durch einen Operator = Matrix

ersetzt. Ist dieser hermitesch, so sind dessen Eigenwerte = Energien reell!
(aber: reelle Eigenwerte $\not\Rightarrow$ $M = M^\dagger$)

Bsp $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_\pm = \pm\sqrt{2}$

Diagonalisierung von Matrizen:

- Wir hatten bereits gezeigt, dass für eine orthogonale Trafo O gilt (1.21) $\vec{e}_i' = O\vec{e}_i$
  $\Rightarrow$ die Matrixelemente M_{ij} und die Vektorkomponenten v_i transformieren wie ein Tensor 2. bzw. 1. Stufe in die neue Basis:
  $M'_{ij} = \left(O^\top M O\right)_{ij} = O_{ki} O_{lj} M_{kl}$
  $v'_i = \left(O^\top v\right)_i = O_{ki} v_k \qquad \Rightarrow\ v^\top \to (v')^\top = v^\top O$
  Skalare sind invariant.

* Wir konstruieren jetzt zu jeder reellen symmetrischen $n \times n$ Matrix M eine orthogonale Trafo O, die diese diagonalisiert:

wir nehmen an, dass alle n Eigenwerte λ_i von M paarweise verschieden sind $\Rightarrow$ die Eigenvektoren $\vec{v}_i$ sind paarweise orthogonal und bilden eine Basis (Seite 33), wir wählen diese als orthonormal $\vec{v}_i \to \vec{v}_i/|\vec{v}_i|$
(sollten 2 oder mehr λ_i entarten, nehmen wir an, dass sich die $\vec{v}_i$ in diesem entarteten Unterraum trotzdem ON wählen lassen)

definiere $O \equiv \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$, dann gilt

$$M = \begin{pmatrix} - & m_1 & - \\ & \vdots & \\ - & m_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^\top v_1 & & m_1^\top v_n \\ m_2^\top v_1 & \dots & m_2^\top v_n \\ \vdots & & \vdots \\ \underbrace{m_n^\top v_1}_{Mv_1} & \dots & \underbrace{m_n^\top v_n}_{Mv_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow O^\top M O = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1^\top v_1 & \dots & \lambda_n v_1^\top v_1 \\ \lambda_1 v_2^\top v_1 & & \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 v_n^\top v_1 & \dots & \lambda_n v_n^\top v_n \end{pmatrix}$$

wegen $v_i^\top v_j = \delta_{ij}$ gilt :

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 1 & & & 0 \\ & \lambda_2 \cdot 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \cdot 1 \end{pmatrix}$$

aus diesem Grund gilt, dass $O^\top O = \mathbb{1}_{n\times n}$.

D.h. diese orthogonale Trafo diagonalisiert $M \to O^\top M O = M'$.

Die Diagonalelemente von M' sind die Eigenwerte von M (und M').

* Auf diese Weise lässt sich für jede koplexe hermitesche Matrix $M = M^\dagger$, $M_{ij} \in \mathbb{C}$ eine unitäre Trafo aus den (komplexen) Eigenvektoren konstruieren, die M diagonalisiert.

Anwendung Diagonalisierung: **Hauptachsentransformation**