

[Abgabe 23.04. in H6 vor der Vorlesung]

Aufgabe 2.1: Erwartungswerte des gaußschen Wellenpaketes

Betrachten Sie das eindimensionale, gaußsche Wellenpaket $\psi(x, t)$ aus der Aufgabe 1.1. Bestimmen Sie die folgenden Erwartungswerte als Funktionen der Zeit t :

1. $\langle x \rangle$ und $(\Delta x)^2$
2. $\langle p \rangle$ und $(\Delta p)^2$
3. Die Breite Δx von $\psi(x, t)$ hängt von der Zeit t ab. Wie lange dauert es, bis sich diese verdoppelt für folgende Teilchen, beschrieben durch $\psi(x, t)$ Aufgabe 1.1.:
 - ein Sandkorn mit $m \approx 1\text{mg}$ und $a \approx 1\text{mm}$
 - ein Alphateilchen ${}^4_2\text{He}^{++}$ mit $m \approx ?$ und $a \approx 10^{-13}\text{m}$

Vergleichen Sie diese Zeiten mit dem Alter des Universums.

Aufgabe 2.2: Lösungen der freien Schrödingergleichung

1. Zeigen Sie durch direktes Einsetzen, dass die folgenden reellen Funktionen *keine* Lösungen der freien Schrödingergleichung sind:

$$\psi_1(x, t) = N \sin(kx - wt) \text{ und } \psi_2(x, t) = N \cos(kx - wt).$$

2. Verifizieren Sie, dass folgende Wellenfunktion $\psi(x, t) = N e^{i(kx - wt)} - N e^{-i(kx + wt)}$ die freie Schrödingergleichung löst, wenn gilt dass $w(k) = \hbar k^2 / (2m)$. Zeigen Sie, dass $\psi(x, t) = 2iN \sin[kx] e^{-iwt}$ gilt und beschreiben Sie, was dies für eine Art von Welle ist.

Aufgabe 2.3: Impuls-Erwartungswert

Ein eindimensionales quantenmechanisches System befindet sich in folgendem, normierbaren stationären Zustand

$$\psi(x, t) = N \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_0 x \right] \phi(x),$$

mit $\phi(x) \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Impulses gleich p_0 ist.

Aufgabe 2.4: Schrödingergleichung mit δ -Potential

Bestimmen Sie die Lösungen der stationären eindimensionalen Schrödingergleichung mit Potential

$$V(x) = -\Omega \delta(x), \quad \Omega > 0.$$

Wieviele gebundene Zustände mit $E < 0$ gibt es und wie groß sind die dazugehörigen Bindungsenergien?