

[ Besprechung in den Übungen am 02.11. (B) u. 03.11.2016 von 14-16 Uhr in D5-153 (A) ]

### **Aufgabe 2.1: Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$**

1. Betrachten Sie die Funktion  $f(z) = |z|^2$ . Ist diese im Ursprung  $z = 0$  differenzierbar, und wenn ja was ist deren Ableitung? Ist die Funktion dort analytisch?
2. Gegeben sei die Funktion  $f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x)$ .  
Berechnen Sie alle partiellen ersten Ableitungen des Real- und Imaginärteils. Wo erfüllt die Funktion die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (C.-R. Dgln.)? Ist die Funktion irgendwo analytisch?

### **Aufgabe 2.2: Analytizität**

Folgende Funktion ist durch ihren Real- und Imaginärteil definiert:

$$f(z) = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y).$$

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion in  $x$ - und in  $y$ -Richtung und zeigen Sie, dass diese gleich sind. Erfüllt die Funktion die C.-R. Dgln. und was läßt sich bezüglich ihrer Analytizität sagen?

### **Aufgabe 2.3: Harmonische Funktionen und harmonische Konjugierte**

1. Es sei bekannt, dass  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  analytisch ist auf  $\mathbb{C}$  und dass  $v(x, y) = e^{-y} \sin(x)$  gilt. Bestimmen Sie  $u(x, y)$  und damit  $w(z)$  (die Funktionen  $u$  und  $v$  heißen harmonisch Konjugierte).
2. Zeigen Sie, dass  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  die zweidimensionale Laplacegleichung erfüllen:

$$\Delta u(x, y) = 0 = \Delta v(x, y)$$

mit  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  (solche Lösungen heißen harmonische Funktionen).

3. Zeigen Sie, dass für beliebige analytische  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  die Funktionen  $u$  und  $v$  harmonisch sind.

### **Aufgabe 2.4: Orthogonale Trajektorien**

1. Betrachten Sie die analytische Funktion  $f(z) = z^2$ . Illustrieren Sie graphisch das Theorem der orthogonalen Trajektorien, indem Sie Flächen konstanter Real- und Imaginärteile zeichnen. Wo sind die Voraussetzungen des Theorems nicht erfüllt?
2. Gegeben sei  $f(z) = a[\log(z + b) - \log(z - b)]$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Auf welchen Flächen sind Real- und Imaginärteil konstant, und unter welchem Winkel schneiden sich diese?

## Liste der Übungsgruppen

Gruppe	Zeit	email
Gruppe A	Di 8-10 in D01-112A	tomasz.checinski@uni-bielefeld.de
Gruppe B	Mi 14-16 in D6-135	max.beuse@physik.uni-bielefeld.de