Übungen zu Rechenmethoden der Physik	**Blatt Nr. 02**	17.04.2014

[Abgabe 25.04. in H12 **vor** der Vorlesung]
Bitte mit Namen, Vornamen und Ihrem Gruppenbuchstaben A-F

Aufgabe 2.1: Pauli Matrizen und deren Eigenschaften (6 Punkte)

1. Beweisen Sie, daß sich jede selbstadjungierte 2×2-Matrix mit komplexen Einträgen als Linearkombination mit reellen Koeffizienten aus den 3 Pauli-Matrizen und der Einheitsmatrix schreiben läßt.

2. Zeigen Sie durch einfaches Nachrechnen, daß $\sigma_1\sigma_2 = \mathrm{i}\sigma_3$ gilt sowie jede zyklische Vertauschung davon. Weiterhin zeigen Sie, daß die folgenden Kommutatorrelationen gelten
$$[\sigma_k, \sigma_l] = 2\mathrm{i}\epsilon_{klm}\sigma_m \ .$$
Die Konstanten $2\epsilon_{klm}$ heißen Strukturkonstanten der Pauli-Matrizen.

3. Zeigen Sie, daß unter Benutzung der Summendarstellung für die Exponentialfunktion aus der Vorlesung für jede der 3 Pauli-Matrizen gilt:
$$\exp(\mathrm{i}\theta\sigma_j) = \cos(\theta)\,\mathbb{1}_2 + \mathrm{i}\sin(\theta)\,\sigma_j \ , \quad j = 1, 2, 3 \ .$$
Benutzen Sie hierzu $\cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$ und $\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$. Sie dürfen Fragen der Konvergenz ignorienen.

Aufgabe 2.2: Orthogonale Transformationen (6 Punkte)

1. In der Vorlesung wurde folgende Drehmatrix um die y-Achse im $\mathbb{R}^3$ eingeführt:
$$D_{y,\phi} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} .$$
Zeigen Sie daß $D_{y,\phi}$ orthogonal ist.

2. Gegeben sei ein beliebiger Vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ in der kanonischen ON Basis sowie die Diagonalmatrix M mit Einträgen $1, 2, 1$ auf der Diagonalen. Berechnen Sie die Komponenten $\vec{v}'$ und M' in der neuen gedrehten Basis. Können Sie Matrizen N angeben für die gilt $N = N'$?

3. Berechnen Sie die Determinante von $D_{y,\phi}$. Gilt dieses Ergebnis für beliebige Drehmatrizen?