Übungen zur Elementarteilchenphysik	**Blatt Nr. 03**	31.10.2014

[Übungsgruppen Donnerstag 6.11. 12-14 und 16-18 in D6-135]

Aufgabe 3.1: Dirac-Matrizen

1. Zeigen Sie ausgehend von $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_4$, dass die Spur Tr$\gamma^\mu$= 0 ist.

2. Beweisen Sie anhand der Standard-Darstellung der Dirac-Matrizen γ^μ aus der Vorlesung, dass $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ gilt. Was bedeutet das Ergebnis für die Hermitizität der Dirac-Matrizen?

3. Definieren wir nun $\gamma_5 = \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

   Geben Sie den Ausdruck von γ^5 in der Standard- Darstellung an. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

   a) $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$, b) $(\gamma_5)^2 = I_4$, c) $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ d) Tr$\gamma_5 = 0$

   Insbesondere folgt aus diesen Eigenschaften dass $P_{R/L} \equiv \frac{1}{2}(I_4 \pm \gamma_5)$ hermitesche Projektionsoperatoren sind:

   $(P_{R/L})^2 = P_{R/L}$, $P_L P_R = 0 = P_R P_L$ und $P_R + P_L = I_4$

Aufgabe 3.2: Dirac-Gleichung

1. Zeigen Sie, dass der Dirac-adjungierte Spinor $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ die folgenden Gleichung erfüllt,

   $$\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial_\mu} + m) = 0 \ ,$$

   wobei der Pfeil nach links bedeutet, dass die Ableitungen hier nach links wirken.

2. Leiten Sie die Dirac-Gleichung für $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ aus den entsprechenden Euler-Lagrange Gleichungen her [Hinweis: die Lagrange-Dichte ist nur bis auf eine totale Ableitung bestimmt. Zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{L}$ aus der Vorlesung äquivalent ist zu $\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) - m\bar{\psi}\psi$.]

3. Zeigen Sie, dass $\int d^3x \ \bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 3.3: Maxwell-Gleichungen

1. Leiten Sie mittels Euler-Lagrange-Gleichungen aus der Lagrangedichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ die Bewegungsgleichungen für das Viererpotential aus der Vorlesung her.

2. Welche Wahl muß für das Skalarfeld $\chi(x)$ in der Eichtransformation $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x)$ getroffen werden, damit die Lorenz-Eichung gilt?

3. Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ mit dem dualen Feldstärketensor eine totale Ableitung ist [Hinweis: Betrachten Sie $K_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^\nu\partial^\rho A^\sigma$ und dessen Ableitung].