Übungen zu Rechenmethoden der Physik	**Blatt Nr. 03**	25.04.2014

[Abgabe 02.05. in H12 **vor** der Vorlesung]

Bitte mit Namen, Vornamen und Ihrem Gruppenbuchstaben A-F

Aufgabe 3.1: Spatprodukt als Determinante (4 Punkte)

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, läßt sich die Determinante einer 3×3 Matrix unter anderem mittels des total anti-symmetrische ϵ-Tensors ϵ_{ijk} (oder auch Levi-Civita Symbol genannt) schreiben.

1. Benutzen Sie dies um zu zeigen, daß sich das Spatprodukt $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ als Determinante einer 3×3 Matrix M schreiben läßt. Ist die Matrix M eindeutig bestimmt?

2. Verwenden Sie die Regel von Sarrus für die Determinante von M um das Volumen zu berechnen, das von den Vektoren $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,0,1)$, $\vec{w} = (0,1,2)$ aufgespannt wird. Kontrollieren Sie das Ergebnis, indem Sie das Spatprodukt ausrechnen (ohne dies als Determinante auszudrücken).

Aufgabe 3.2: Determinanten von 2×2 und 3×3 Matrizen (6 Punkte)

1. Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

   - durch Laplace-Entwicklung nach der letzten Zeile
   - durch Laplace-Entwicklung nach der zweiten Spalte
   - durch eine andere Methode Ihrer Wahl

2. Gegeben sei $L = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix}$, mit $a \in \mathbf{C}$.

   - Für welche Werte von a ist L regulär?
   - Bestimmen Sie L^{-1} wenn dies existiert und überprüfen Sie expliziet $LL^{-1} = 1|$.
   - Berechnen Sie für $a = 0$ die Pfaffsche Determinante und verifizieren Sie daß gilt

$$\det(L) = (\mathsf{Pf}(L))^2.$$

Aufgabe 3.3: Determinante von Blockmatrizen (2 Punkte)

Gegeben sei eine $2n \times 2n$ Blockmatrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ bestehend aus $n \times n$ Blöcken A, B, C, D. Beweisen Sie daß wenn D regulär ist folgende Formel gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D) \det(A - BD^{-1}C)$$