[Abgabe 07.05. in H6 *vor* der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 4.1: Reflexion, Transmission und Vollständigkeit im δ-Potential
Betrachten Sie die stationäre Schrödingergleichung mit δ-Potential aus der Übung 2.4. mit $\Omega = \frac{\hbar^2\kappa}{m} > 0$ und $E > 0$.

1. Berechnen Sie Reflexion- und Transmissionkoeffizienten $R(E)$ und $T(E)$ für Streuung an diesem Potential und skizzieren Sie diese.

2. Zeigen Sie, dass die geraden $(+)$ und ungeraden $(-)$ Streulösungen gegeben sind durch

$$\phi_k^+(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(k|x| + \eta(k)) \ , \quad \phi_k^-(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \ , \quad k \geq 0 \ ,$$

   und bestimmen Sie die Streuphase $\eta(k)$.

3. Wie Sie aus Übung 2.4. wissen, ist die gebundene Lösung zu $E < 0$ von der Form $\phi_0(x) = \sqrt{\kappa} \exp[-\kappa|x|]$. Zeigen Sie die Orthogonalität zwischen der gebundenen und den beiden Streulösungen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \phi_0(x)^* \phi_k^{\pm}(x) = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \phi_k^+(x)^* \phi_{k'}^-(x) \ .$$

4. Überprüfen Sie die folgende Vollständigkeitsrelation zu diesem Lösungssystem, gegeben durch

$$\phi_0(x)^* \phi_0(x') + \int_0^{\infty} dk (\phi_k^+(x)^* \phi_k^+(x') + \phi_k^-(x)^* \phi_k^-(x)) = \delta(x - x') \ .$$

   [Hinweise: $\int_0^\infty dk[\sin^2(\eta(k)) \cos(kx) + \sin(\eta(k)) \cos(\eta(k)) \sin(kx)] = \pi\kappa \exp[-\kappa x]$ und $\int_0^\infty dk \cos(kx) = \pi\delta(x)$.]

Aufgabe 4.2: Breit-Wigner-Formel
Die Resonanzenergieen E_n werden durch die Bedingung $T(E_n) = 1$ definiert. Zeigen Sie ausgehend vom Ergebnis für den Transmissionskoeffizienten $T(E)$ in der Vorlesung, daß sich dieser in der Nähe von $E = E_n$ durch die berühmte Breit-Wigner-Formel nähern läßt,

$$T(E) \approx \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_n)^2 + (\Gamma/2)^2},$$

wobei Γ eine Konstante ist. In welchem Energiebereich stellt diese Gleichung eine zuverlässige Näherung von $T(E)$ dar?

Aufgabe 4.3: Lokalisierung im Kastenpotential
Von einem Teilchen sei bekannt, daß es sich in der linken Hälfte eines sehr tiefen Kastenpotentials aufhält (siehe Übung 3.1.) und dort an jeder Stelle x mit gleicher Wahrscheinlichkeit anzutreffen ist.

1. Welche Wellenfunktion beschreibt diesen Zustand bei $t = 0$?

2. Wieso bleibt das Teilchen für spätere Zeiten $t \gg 1$ nicht in der linken Hälfte lokalisiert?