Übungen zur Elementarteilchenphysik	**Blatt Nr. 04**	07.11.2014

[Übungsgruppen Donnerstag 13.11. 12-14 und 16-18 in D6-135]

Aufgabe 4.1: Hamilton-Operator des freien komplexen Klein-Gordon-Feldes
Ausgehend von der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{KG} = \partial_\mu\phi(x)^*\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi(x)^*\phi(x)$, dem konjugierten Impuls $\frac{\partial\mathcal{L}_{KG}}{\partial_0\phi(x)} = \Pi(x)$ und der Legendre-Transformation $\mathcal{H} = \partial_0\phi(x)\Pi(x) - \mathcal{L}_{KG}$ ergibt sich der folgende Ausdruck':
$\hat{H} = \int d^3x \left[\partial_0\hat{\phi}(x)\partial_0\hat{\phi}(x)^\dagger + \nabla\hat{\phi}(x)^\dagger \cdot \nabla\hat{\phi}(x) + m^2\hat{\phi}(x)^\dagger\hat{\phi}(x)\right]$.

Zeigen Sie anhand der Lösung für $\hat{\phi}(x)$ aus der Vorlesung dass gilt:

$$\hat{H} = \int d^3p E_{\vec{p}} \left[\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}) + \frac{1}{2}(\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{p}})\right] = \int d^3p E_{\vec{p}} \left[\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} + \delta^{(3)}(\vec{0})\right].$$

Ferner hat die erhaltene Ladung $Q(t) = \int d^3x\, i[\phi(x)^*\partial^0\phi(x) - \phi(x)\partial^0\phi(x)^*]$ die folgende Operatordarstellung:

$$\hat{Q} = \int d^3p \left[\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}) - \frac{1}{2}(\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{p}})\right] = \int d^3p \left[\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}}\right].$$

Aufgabe 4.2:
Zeigen Sie die folgende Regularisierung der Delta-Funktion für ein endliches Volumen V:

$$\delta^{(3)}(\vec{0}) = \frac{V}{(2\pi)^3}.$$

Was ist die physikalische Interpretation für diesen Teil des Hamilton-Operators?.

Aufgabe 4.3:
Beweisen Sie die folgenden Relation für die Polarisationsvektoren in der Lösung der Maxwell-Gleichungen in Coulomb-Eichung:

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^i_{(\lambda)}(\vec{p})\varepsilon^j_{(\lambda)}(\vec{p}) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{(\vec{p})^2}\ .$$

Aufgabe 4.4:
Betrachten wir die folgenden Spinoren aus der Lösung der Dirac-Gleichung:

$$u(\vec{p}, s) = C(\gamma_\mu p^\mu + m)\begin{pmatrix}\xi_s \\ 0\end{pmatrix},\quad v(\vec{p}, s) = C'(\gamma_\mu p^\mu - m)\begin{pmatrix}0 \\ \xi_{-s}\end{pmatrix},$$

mit $s = \pm$ und $\xi_+ = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$ und $\xi_- = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass die Normierung

$$\bar{u}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s') = 2m\delta_{ss'}\ ,\quad \bar{v}(\vec{p}, s)v(\vec{p}, s') = -2m\delta_{ss'}$$

erfüllt wird durch $C = -C' = 1/\sqrt{E_{\vec{p}} + m}$. Was sind dann $u(\vec{p}, s)^\dagger u(\vec{p}, s')$ und $v(\vec{p}, s)^\dagger v(\vec{p}, s')$?