

[ Besprechung in den Übungen am 15. u. 16.11.2016 ]

### Aufgabe 4.1: Konvergenzradien von Potenzreihen

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Funktionen:

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n^2+1)3^n}$
3.  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$

### Aufgabe 4.2: Riemannsche Zeta-Funktion

Die Riemannsche Zeta-Funktion besitzt für  $\Re(z) > 1$  folgende Integraldarstellung:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1},$$

wobei  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}$  die Eulersche Gamma-Funktion aus der Vorlesung ist.

1. Zeigen Sie, dass folgende Reihendarstellung gilt:  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ .
2. Leiten Sie folgende, alternative Darstellung her für  $\Re(z) > 0$ :

$$\zeta(z) = \frac{1}{(1 - 2^{1-z})\Gamma(z)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{z-1}}{e^t + 1}.$$

[Hinweis:  $\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^{t/2} - 1} - \frac{1}{e^{t/2} + 1} \right)$ ]

### Aufgabe 4.3: Laurentreihen

1. Entwickeln Sie folgende Funktion in eine Laurentreihe:  $f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{3z}\right)$ ,  $|z| > 0$ .  
Wo konvergiert diese?
2. Bestimmen Sie den Konvergenzring der folgenden Laurentreihe:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}.$$

3. Entwickeln Sie die folgende Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

in eine Laurentreihe  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n$ , die in einem Ring konvergiert, der  $z = 7/2$  enthält [Hinweis: setzen Sie  $z = w + 1$  und entwickeln Sie in  $w$ ].