Blatt Nr. 04	Übungen zu den mathematischen Methoden der Physik	07.11.2017

[Besprechung in den Übungen am 14. und 15.11.2017]

Aufgabe 4.1: Konvergenzradien von Potenzreihen
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n^2+1)3^n}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$

Aufgabe 4.2: Riemannsche Zeta-Funktion
Die Riemannsche Zeta-Funktion besitzt für $\Re e(z) > 1$ folgende Integraldarstellung:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1},$$

wobei $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$ die Eulersche Gamma-Funktion aus der Vorlesung ist.

1. Zeigen Sie, dass folgende Reihendarstellung gilt: $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$.
2. Leiten Sie folgende, alternative Darstellung her für $\Re e(z) > 0$:

$$\zeta(z) = \frac{1}{(1-2^{1-z})\Gamma(z)} \int_0^\infty dt \frac{t^{z-1}}{e^t + 1}.$$

[Hinweis: $\frac{1}{e^t-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{t/2}-1} - \frac{1}{e^{t/2}+1}\right)$]

Aufgabe 4.3: Laurentreihen

1. Entwickeln Sie folgende Funktion in eine Laurentreihe: $f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{3z}\right), |z| > 0$. Wo konvergiert diese?
2. Bestimmen Sie den Konvergenzring der folgenden Laurentreihe sowie die Funktion, gegen die sie konvergiert:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}.$$

3. Entwickeln Sie die folgende Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

in eine Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n$. Bestimmen Sie die Radien R_1 und R_2 des Ringes, in dem diese konvergiert und überprüfen Sie, dass dieser $z = 7/2$ enthält. [Hinweis: setzen Sie $z = w + 1$ und entwickeln Sie in w].