Übungen zur Theoretischen Physik II **Blatt Nr. 05** 07.05.2019

[Abgabe 14.05. in H6 *vor* der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 5.1: Normierung ebener Wellen

Um eindimensionale, ebene Wellen $\psi_k(x) = C_1 \exp[ikx]$ als normierte Zustände eines Hilbertraumes betrachten zu können, müssen diese normierbar gemacht werden. Wir benutzen hierzu die folgende Regularisierungsvorschrift: wir führen eine endliche Länge in Form eines sehr großen Kastens mit der Breite L_1 und unendlicher Höhe ein. Die Wellenfunktionen sollen dann folgenden periodische Randbedingungen erfüllen:
$\psi_k(x - L_1/2) = \psi_k(x + L_1/2)$.

1. Was sind die erlaubten Werte von k in diesem Fall?
2. Bestimmen Sie die Konstante C_1, so daß folgende Normierung gilt:

$$\int_{-L_1/2}^{L_1/2} dx\ \psi_k^*(x)\psi_q(x) = \delta_{k,q}\ .$$

3. Erweitern Sie dieses Konzept auf ebene Wellen $\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = C \exp[i\vec{k}\vec{x}]$ in d Dimensionen, unter Benutzung einer d-dimensionalen Box mit den Maßen $L_1, \ldots, L_d$. Welche Werte erhalten Sie für $\vec{k}$ und die Normierungskonstante C?

Aufgabe 5.2: Schwarzsche Ungleichung

Leiten Sie die Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle\psi|\chi\rangle|^2 \leq ||\psi||^2||\chi||^2$$

für zwei beliebige Elemente $|\psi\rangle, |\chi\rangle$ eines Hilbertraumes V her.

Aufgabe 5.3: Kalte Emission

Wir betrachten den äußeren Photoeffekt bei dem die Austrittsarbeit $V_0 - E$ nötig ist, um ein Elektron der Energie E aus dem Metall herauszulösen. Wenn an das Metall ein äußeres elektrische Feld $\mathcal{E}$ angelegt wird hat das Potential des Elektrons näherungsweise die Form (e bezeichnet die Elementarladung)

$$V(x) = \begin{cases} 0\ , & x < 0 \\ V_0 - e\mathcal{E}x\ , & x \geq 0 \end{cases}\ ,$$

da diese sich im Metall fast wie freie Teilchen bewegen. Skizzieren Sie das Potential und berechnen Sie den Gamov-Faktor aus der Vorlesung für $0 < E < V_0$.

Aufgabe 5.4: Lebensdauer im α-Zerfall

Die mittlere Lebensdauer τ des α-Teilchens im Kern ist gegeben durch $\tau = t_0/T(E) = t_0 \exp[G(E)]$, wobei t_0 eine schwach mit der Energie E variierende Konstante ist, und $G(E)$ der in der Vorlesung näherungsweise angegebene Gamov-Faktor ist. Gegeben sei der klassische Umkehrpunkt im Kern $R \approx R_0 Z^{1/3}$ mit $R_0 \approx 1.6 \times 10^{-15} m$. Betrachten Sie die Entwicklung von $G(E)$ bis zur Ordnung $Z^{2/3}$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der experimentell ermittelten Formel

$$\log_{10}[\tau/1\ \text{Jahr}] = 1.61 \left(\frac{Z}{\sqrt{E/1\text{MeV}}} - Z^{2/3} \right) - const.$$