Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 05**	08.05.2018

[Abgabe 15.05. *vor* der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 5.1: Reflexion, Transmission und Vollständigkeit im δ-Potential
Betrachten Sie die stationäre Schrödingergleichung mit δ-Potential aus der Übung 3.2. mit $\Omega = \frac{\hbar^2\kappa}{m} > 0$ und $E > 0$.

1. Berechnen Sie Reflexion- und Transmissionkoeffizienten $R(E)$ und $T(E)$ für Streuung an diesem Potential und skizzieren Sie diese.

2. Zeigen Sie, dass die geraden $(+)$ und ungeraden $(-)$ Streulösungen gegeben sind durch
$$\phi_k^+(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(k|x| + \eta(k)) \ , \quad \phi_k^-(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \ , \quad k \geq 0 \ ,$$
und bestimmen Sie die Streuphase $\eta(k)$.

3. Wie Sie aus Übung 3.2. wissen ist die gebundene Lösung zu $E < 0$ von der Form $\phi_0(x) = \sqrt{\kappa}\exp[-\kappa|x|]$. Zeigen Sie die Orthogonalität zwischen der gebundenen und den beiden Streulösungen:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \phi_0(x)^*\phi_k^{\pm}(x) = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \phi_k^+(x)^*\phi_{k'}^-(x) \ .$$

4. Überprüfen Sie die folgende Vollständigkeitsrelation zu diesem Lösungssystem, gegeben durch
$$\phi_0(x)^*\phi_0(x') + \int_0^{\infty} dk(\phi_k^+(x)^*\phi_k^+(x') + \phi_k^-(x)^*\phi_k^-(x)) = \delta(x - x') \ .$$
[Hinweise: $\int_0^\infty dk[\sin^2(\eta(k))\cos(kx)+\sin(\eta(k))\cos(\eta(k))\sin(kx)] = \pi\kappa\exp[-\kappa x]$ und $\int_0^\infty dk\cos(k) = \pi\delta(x)$.]

Aufgabe 5.2: Kalte Emission
Wir betrachten den äußeren Photoeffekt bei dem die Austrittsarbeit $V_0 - E$ nötig ist, um ein Elektron der Energie E aus dem Metall herauszulösen. Wenn an das Metall ein äußeres elektrische Feld $\mathcal{E}$ angelegt wird hat das Potential des Elektrons näherungsweise die Form
$$V(X) = \begin{cases} 0 \ , & x < 0 \\ V_0 - e\mathcal{E}x \ , & x \geq 0 \end{cases} \ ,$$
da diese sich im Metall fast wie freie Teilchen bewegen. Skizzieren Sie das Potential und berechnen Sie den Gamov-Faktor aus der Vorlesung für $0 < E < V_0$.

Aufgabe 5.3: Lebensdauer im α-Zerfall

Die mittlere Lebensdauer τ des α-Teilchens im Kern ist gegeben durch $\tau = t_0/T(E) = t_0 \exp[G(E)]$, wobei t_0 eine schwach mit der Energie E variierende Konstante ist, und $G(E)$ der in der Vorlesung näherungsweise angegebene Gamov-Faktor ist. Gegeben sei der klassische Umkehrpunkt im Kern $R \approx R_0 Z^{1/3}$ mit $R_0 \approx 1.6 \times 10^{-15} m$. Betrachten Sie die Entwicklung von $G(E)$ bis zur Ordnung $Z^{2/3}$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der experimentell ermittelten Formel

$$\log_{10}[\tau/1\ \text{Jahr}] = 1.61 \left(\frac{Z}{\sqrt{E/1\text{MeV}}} - Z^{2/3} \right) - const.$$