Übungen zur Elementarteilchenphysik	**Blatt Nr. 05**	14.1.2014

[Übungsgruppen Donnerstag 20.11. 12-14 und 16-18 in D6-135]

Aufgabe 5.1: Helizitätsoperator
Der Helizitätsoperator ist definiert als $h(\vec{p}) \equiv \vec{e}_{\vec{p}}\vec{\Sigma}$, wobei

$$\vec{e}_{\vec{p}} \equiv \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad \text{und} \quad \vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

durch die Pauli Matrizen σ^k gegeben ist. Beweisen Sie folgende Eigenschaften:
i) $h(\vec{p})^2 = I_4$ und ii) die Operatoren $P_\pm^{(h)} \equiv \frac{1}{2}(I_4 \pm h(\vec{p}))$ sind Projektionsoperatoren, d.h. es gilt: $(P_\pm^{(h)})^2 = P_\pm^{(h)}$ und $P_\pm^{(h)} P_\mp^{(h)} = 0$.

Aufgabe 5.2: Chiralität
Zeigen Sie, dass der Chiralitätseigenwert von rechts/linkshändigen Spinoren $\psi_{R/L} = P_{R/L}\psi$ gleich ± 1 ist, wobei $P_{R/L}$ in Übung 3.1 eingeführt wurde.

Aufgabe 5.3: Phasenraumintegration des Zweikörperzerfalls
Betrachten Sie den Zerfall $A \to 1+2$ im Ruhesystem des Teilchens A in Teilchen 1 und 2, mit Massen m, m_1, m_2 und den jeweiligen Viererimpulsen $p^\mu = \left(m, \vec{0}\right)$, sowie $p_1^\mu = (E_{\vec{p}_1}, \vec{p}_1)$, $p_2^\mu = (E_{\vec{p}_2}, \vec{p}_2)$. Berechnen Sie die Zerfallsrate aus der Vorlesung

$$\Gamma_{A\to 1+2} = \frac{(2\pi)^4}{2m} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}} |\mathcal{M}(\vec{p}_1, \vec{p}_2)|^2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p)$$

in folgenden Schritten:

1. Führen Sie mittels der δ-Funktion die p_1-Integration aus:
$$\Gamma_{A\to 1+2} = \frac{1}{2m(4\pi)^2} \int \frac{d^3p_2 |\mathcal{M}(-\vec{p}_2, \vec{p}_2)|^2}{\sqrt{m_1^2 + \vec{p}_2^2}\sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^2}} \,\delta\left(m - \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_2^2} - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^2}\right)$$
2. Nehmen Sie an, dass $\mathcal{M}(-\vec{p}_2, \vec{p}_2) = \mathcal{M}(|\vec{p}_2|)$ nur vom Betrag abhängt, so dass sich in Kugelkoordinaten ergibt:
$$\Gamma_{A\to 1+2} = \frac{1}{8\pi m} \int_0^\infty \frac{dr\, r^2 |\mathcal{M}(r)|^2}{\sqrt{m_1^2 + r^2}\sqrt{m_2^2 + r^2}} \,\delta\left(m - \sqrt{m_1^2 + r^2} - \sqrt{m_2^2 + r^2}\right)$$
3. Mittels Substitution $r \to E = \sqrt{m_1^2 + r^2} + \sqrt{m_2^2 + r^2}$ zeigen Sie, dass gilt
$$\Gamma_{A\to 1+2} = \frac{r_0}{8\pi m^2} |\mathcal{M}(r_0)|^2 \Theta(m - m_1 - m_2) \quad \text{mit} \quad r_0 = ?.$$

Aufgabe 5.4:
Beweisen Sie, dass das Maß der Phasenraumintegration die folgende Lorentzinvariante Form aus der Vorlesung annimmt:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} = 2\pi \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(p^2 - m^2)\, \Theta(p^0)$$