Blatt Nr. 05 Übungen zu den mathematischen Methoden der Physik 14.11.2016

[Besprechung in den Übungen am 21. u. 22.11.2017]

Aufgabe 5.1: Regel von l'Hôpital

Es seien $f(z)$ und $g(z)$ analytisch in einem Gebiet G und im Punkt $\alpha \in G$ gelte $f(\alpha) = 0$, $g(\alpha) = 0$ sowie $g'(\alpha) \neq 0$. Dann gilt die Regel von l'Hôpital:

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

Benutzen Sie dies um Folgendes zu zeigen:

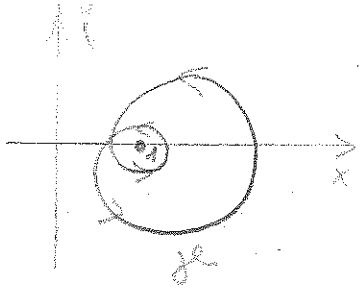
1. $f(z) = \frac{z^6+1}{z^2+1}$ hat eine behebbare Singularität bei $z = \pm i$.
2. $f(z) = \frac{\sin(z)-\tan(z)}{z^2}$ hat eine behebbare Singularität bei $z = 0$.
3. $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ hat einfache Pole bei $z = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$.
4. Beweisen Sie die Regel von l'Hôpital.

Aufgabe 5.2: Integrale über geschlossene Wege

Berechnen Sie folgende komplexe Konturintegrale

1. $$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$$
2. $$\oint_{|z|=R} \frac{dz}{z^2+z} \quad \text{mit} \quad R \neq 1$$

Aufgabe 5.3: Umlaufzahlen



1. Integrieren Sie folgende Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$$

über den skizzierten Weg γ auf zwei verschieden Weisen:
i) durch Laurententwicklung und
ii) durch Partialbruchzerlegung

2. Welche Umlaufzahlen $\nu_{\gamma_k}(z_j)$ haben diese beiden Wegen γ_1 und γ_2 um die markierten Punkte z_1 und z_2?