

[Abgabe 16.05. in H12 vor der Vorlesung]

Bitte mit Namen, Vornamen und Ihrem Gruppenbuchstaben A-F**Aufgabe 5.1: Hauptachsentransformation (4 Punkte)**

Schreiben Sie die quadratische Form

$$f(x, y) = \alpha x^2 - 2\sqrt{2}\alpha xy, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

in Matrixform. Benützen Sie dies um die folgende Gleichung in den neuen Koordinaten x' und y' zu lösen, $f(x', y') = 1$, indem Sie die dazugehörige Matrix diagonalisieren. Wählen Sie die diagonalisierende Transformation so, daß sie eine eigentliche Drehung ist.

Aufgabe 5.2: Baker-Campbell-Hausdorff Formel (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß für kleines $|x| \ll 1$ die folgende Relation für die Funktionen der beiden $n \times n$ Matrizen M und N gilt:

$$\exp(xM) \exp(xN) = \exp\left(x(M + N) + \frac{x^2}{2}[M, N]\right) + \mathcal{O}(x^3),$$

wobei $[M, N] = MN - NM$ den Kommutator bezeichnet.

Die allgemeine Baker-Campbell-Hausdorff Formel lautet:

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_n,$$

wobei $B_n = [A, B_{n-1}]$ und $B_0 = B$. Zeigen Sie, dass aus dieser die obige Gleichung folgt.

Aufgabe 5.3: Phasenübergänge (2 Punkte)

Gegeben sei die folgende Funktion

$$F(T) = a(T - T_c)^b, \quad \text{für } T > T_c,$$

mit reellen positiven Konstanten a, b, T_c . Bestimmen Sie wieviele Ableitungen von $F(T)$ nach T an der Stelle $T = T_c$ existieren in Abhängigkeit vom Parameter b . (Das Verhalten der freien Energie ist typischerweise von dieser Form in der Nähe von Phasenübergängen. Dann ist b der kritische Exponent und bestimmt die Ordnung des Überganges.)

Aufgabe 5.4: Regel von l'Hôpital (2 Punkte)

Zeigen Sie unter der Benutzung der Regel von l'Hôpital daß gilt:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \exp(-x) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(x) = 0$ für $0 < \alpha \in \mathbb{R}$