Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 06**	14.05.2019

[Abgabe 21.05. in H6 *vor* der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 6.1: Bewegungsgleichung für Erwartungswerte

1. Gegeben sein ein Polynom vom Grad n als Potential $V(x)$. Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{p}, V(\hat{x})]$ und bringen Sie ihn in eine Form, die keine Abhängigkeit vom Operator $\hat{p}$ mehr aufweist.
2. Zeigen Sie für den eindimensionalen Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{x})$ unter Benutzung des Ehrenfestschen Theorems aus der Vorlesung, daß der quantenmechanische Erwartungswert die folgende Bewegungsgleichung erfüllt:
$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{x}\rangle = -\langle V'(\hat{x})\rangle \ .$$
3. Bringen Sie diese Gleichung mit der klassischen Bewegungsgleichung in Beziehung.

Aufgabe 6.2: Exponentialfunktion von Operatoren
Gegeben seien zwei Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ eines Hilbertraumes V. Die Exponentialfuntion eines solchen Operators ist wie folgt durch deren Taylorreihe definiert:

$$\exp[\hat{A}] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{A}^n \ .$$

Zeigen Sie, daß für beliebige $t \in \mathbb{C}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\exp[t\hat{A}]\hat{B}\exp[-t\hat{A}] = \hat{B} + t[\hat{A},\hat{B}] + \frac{t^2}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{t^3}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \ldots$$

Aufgabe 6.3: Allgemeine Unschärferelation
Ausgehend von der Schwarzschen Ungleichung in Hilberträumen in Übung 5.2. leiten Sie die folgende allgemeine Unschärferelation her:

$$\Delta A \ \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle| \ .$$

Hierbei sind $(\Delta A)^2 \equiv \langle\psi|(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2|\psi\rangle$ das Quadrat der Varianz der Observablen $\hat{A}$, und entsprechend für die Observable $\hat{B}$. Ferner sei deren Kommutator gegeben durch

$$[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}$$

Zeigen Sie außerdem, daß $\hat{C}$ hermitesch ist.

Aufgabe 6.4: Baker-Campbell-Hausdorff-Formel
Gegeben seien zwei Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ eines Hilbertraumes V, die folgende Kommutatorrelationen erfüllen:

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] \ .$$

Verifizieren Sie die folgende Gleichung, die einen Spezialfall der allgemeineren Baker-Campbell-Hausdorff-Formel darstellt:

$$\exp[\hat{A}] \exp[\hat{B}] = \exp\left[\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]\right] \ .$$

[Hinweis: Betrachten Sie zunächst die operatorwertige Funktion
$\hat{D}(t) \equiv \exp[-t(\hat{A}+\hat{B})] \exp[t\hat{A}] \exp[t\hat{B}]$. Leiten Sie unter Benutzung von Übung 6.2 die folgende Differentialgleichung her: $\frac{d}{dt}\hat{D}(t) = t[\hat{A}, \hat{B}]\hat{D}$. Lösen Sie dann diese Gleichung und setzen Sie am Ende $t = 1$.]