Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 06**	15.05.2018

[Abgabe 22.05. *vor* der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 6.1: Normierung ebener Wellen
Um eindimensionale, ebene Wellen $\psi_k(x) = C_1 \exp[ikx]$ als normierte Zustände eines Hilbertraumes betrachten zu können, müssen diese normierbar gemacht werden. Wir benutzen hierzu die folgende Regularisierungsvorschrift: wir führen eine endliche Länge in Form eines sehr großen Kastens mit der Breite L_1 und unendlicher Höhe ein. Die Wellenfunktionen sollen dann folgenden periodische Randbedingungen erfüllen:
$\psi_k(x - L_1/2) = \psi_k(x + L_1/2)$.

1. Was sind die erlaubten Werte von k in diesem Fall?
2. Bestimmen Sie die Konstante C_1, so daß folgende Normierung gilt:
$$\int_{-L_1/2}^{L_1/2} dx \ \psi_k^*(x)\psi_q(x) = \delta_{k,q} \ .$$
3. Erweitern Sie dieses Konzept auf ebene Wellen $\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = C \exp[i\vec{k}\vec{x}]$ in d Dimensionen, unter Benutzung einer d-dimensionalen Box mit den Maßen $L_1, \ldots, L_d$. Welche Werte erhalten Sie für $\vec{k}$ und die Normierungskonstante C?

Aufgabe 6.2: Schwarzsche Ungleichung
Leiten Sie die Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle\psi|\chi\rangle|^2 \leq ||\psi||^2||\chi||^2$$

für zwei beliebige Elemente $|\psi\rangle, |\chi\rangle$ eines Hilbertraumes V her.

Aufgabe 6.3: Exponentialfunktion von Operatoren
Gegeben seien zwei Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ eines Hilbertraumes V. Die Exponentialfuntion eines solchen Operators ist wie folgt durch deren Taylorreihe definiert:

$$\exp[\hat{A}] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{A}^n \ .$$

Zeigen Sie, daß für beliebige $t \in \mathbb{C}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\exp[t\hat{A}]\hat{B}\exp[-t\hat{A}] = \hat{B} + t[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{t^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{t^3}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \ldots$$