

[ Abgabe 23.05. in H12 vor der Vorlesung ]

**Bitte mit Namen, Vornamen und Ihrem Gruppenbuchstaben A-F****Aufgabe 6.1: Taylorreihe (4 Punkte)**

Bestimmen Sie die ersten 2 nichtverschwindenden Koeffizienten der Taylorreihe von  $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$  bei  $x = \pi/2$  (Hinweis: betrachten Sie Funktionen von  $y = x - \pi/2$ )

1. unter Benutzung der Definition der Taylorreihe
2. unter Benutzung der Reihendarstellung von  $\sin(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}$  und  $\cos(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n}$  sowie deren Entwicklung für kleine  $y$

**Aufgabe 6.2: Uneigentliche Integrale und Hauptwerte (4 Punkte)**

1. Bestimmen Sie für welche Werte von  $0 \geq \alpha \in \mathbb{R}$  die beiden folgenden uneigentlichen Integrale existieren und ermitteln Sie gegebenenfalls deren Wert:

$$\int_0^1 dx x^\alpha, \quad \int_1^\infty dx x^\alpha.$$

2. Gegeben sei das folgende Hauptwertintegral:

$$P.V. \int_{-a}^b dx x^{-k}, \quad a, b > 0, \quad 0 \leq k \in \mathbb{N}.$$

Gibt es Werte von  $k$ , für die dieses Integral existiert und wenn ja berechnen Sie dies. Skizzieren Sie die Funktion im Integranden und Fläche des Integrals.

**Aufgabe 6.3: Stammfunktionen (2 Punkte)**

Bestätigen Sie die Tabelle folgender Stammfunktionen

1.  $\int^x dy \frac{1}{1-y^4} = \frac{1}{2}(\operatorname{artanh}(x) + \arctan(x))$   
 $\int^x dy \frac{y}{1-y^4} = \frac{1}{2}\operatorname{artanh}(x^2)$   
 $\int^x dy \frac{y^2}{1-y^4} = \frac{1}{2}(\operatorname{artanh}(x) - \arctan(x))$
2.  $\int^x dy \frac{1}{\sin^2(y)} = -\frac{1}{\tan(x)}, \quad \int^x dy \frac{1}{\tan(y)} = \ln |\sin(x)|$

**Aufgabe 6.4: Integral eines Polynoms in Sinus und Cosinus (2 Punkte)**

Zeigen Sie, daß folgendes Integral durch Substitution auf eine rationale Funktion im Integranden abgebildet werden kann und berechnen Sie dies mittels Partialbruchzerlegung:

$$K = \int_a^b dx \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)}$$