

[Abgabe 28.05. in H6 vor der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 7.1: Der Statistische Operator in einem Zweizustandssystem

Wir betrachten einen endlichdimensionalen Hilbertraum, der die folgende Basis aus zwei orthonormierten Zuständen hat: $\{|\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}\rangle\}$. Gegeben sei nun der folgende reine Zustand $|\psi\rangle \equiv (e^{i\alpha}|\frac{1}{2}\rangle + e^{i\beta}|-\frac{1}{2}\rangle)/\sqrt{2}$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, daß der Zustand $|\psi\rangle$ richtig normiert ist.
2. Zeigen Sie, dass der statistische Operator die folgende Matrixdarstellung hat:

$$\hat{\rho}_\psi \equiv |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{i(\alpha-\beta)} \\ e^{-i(\alpha-\beta)} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Zeigen Sie, daß gilt $\text{Sp}[\hat{\rho}_\psi] = 1 = \text{Sp}[\hat{\rho}_\psi^2]$.
4. Wir definieren nun den gemittelten statistischen Operator $\hat{\rho}_G \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \hat{\rho}_\psi$. Begründen Sie, daß dieser einem gemischten Zustand entspricht, indem Sie folgende Gleichungen zeigen: $\text{Sp}[\hat{\rho}_G^2] < 1$ und $\text{Sp}[\hat{\rho}_G] = 1$.

Aufgabe 7.2: Eigenschaften der Spur

Zeigen Sie, daß die in der Vorlesung definierte Spur weitere einfache Eigenschaften besitzen:

- $\text{Sp}[\hat{A}_H(t)] = \text{Sp}[\hat{A}]$
- $\text{Sp}[\hat{A}\hat{B}\hat{C}] = \text{Sp}[\hat{C}\hat{A}\hat{B}] = \text{Sp}[\hat{B}\hat{C}\hat{A}]$ aber i.A. $\neq \text{Sp}[\hat{A}\hat{C}\hat{B}]$
- $\text{Sp}[\hat{A} + \hat{B}] = \text{Sp}[\hat{A}] + \text{Sp}[\hat{B}]$
- $\text{Sp}[\hat{A}^\dagger] = \text{Sp}[\hat{A}]^*$

Aufgabe 7.3: Eigenwerte eines normierten Operators

Gegeben sei ein hermitescher Operator $\hat{P} = \hat{P}^\dagger$, der normiert ist $\text{Sp}[\hat{P}] = 1$ und $\hat{P}^2 = \hat{P}$ erfülle.

- Zeigen Sie, daß die einzigen möglichen Eigenwerte 0 und 1 sind.
- Zeigen Sie weiterhin, daß es nur einen linear unabhängigen Eigenzustand zum Eigenwert 1 geben kann.