Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 07**	17.05.2022

[Abgabe 24.05. im Lernraum +]

Aufgabe 7.1: Allgemeine Unschärferelation (5 Punkte)
Ausgehend von der Schwarzschen Ungleichung in Hilberträumen in Übung 6.2., dass $|\langle\phi|\chi\rangle|^2 \leq ||\phi||^2||\chi||^2$ für zwei beliebige Elemente $|\phi\rangle, |\chi\rangle$ eines Hilbertraumes V gilt, leiten Sie die folgende allgemeine Unschärferelation her:

$$\Delta A \; \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle| \; .$$

Hierbei sind $(\Delta A)^2 \equiv \langle\psi|(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2|\psi\rangle$ das Quadrat der Varianz der Observablen $\hat{A}$, und entsprechend für die Observable $\hat{B}$. Ferner sei deren Kommutator gegeben durch

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}.$$

Zeigen Sie ausserdem, dass $\hat{C}$ hermitesch ist. [Hinweis: Definieren Sie die Operatoren $\delta A = A - \langle A\rangle$ und δB und betrachten Sie deren Wirkung auf $|\psi\rangle$.]

Aufgabe 7.2: Baker-Campbell-Hausdorff-Formel
Gegeben seien zwei Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ eines Hilbertraumes V, die folgende Kommutatorrelationen erfüllen:

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] \; .$$

Verifizieren Sie die folgende Gleichung, die einen Spezialfall der allgemeineren Baker-Campbell-Hausdorff-Formel darstellt:

$$\exp[\hat{A}]\exp[\hat{B}] = \exp\left[\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]\right] \; .$$

[Hinweis: Betrachten Sie zunächst die operatorwertige Funktion
$\hat{D}(t) \equiv \exp[-t(\hat{A}+\hat{B})]\exp[t\hat{A}]\exp[t\hat{B}]$. Leiten Sie unter Benutzung von Übung 6.3 für Exponentialfunktionen von Operatoren die folgende Differentialgleichung her: $\frac{d}{dt}\hat{D}(t) = t[\hat{A}, \hat{B}]\hat{D}$. Lösen Sie dann diese Gleichung und setzen Sie am Ende $t = 1$.]

Aufgabe 7.3: Eigenschaften der Spur
Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Spur weitere einfache Eigenschaften besitzt:

- Sp$[\hat{A}_H(t)] =$ Sp$[\hat{A}]$
- Sp$[\hat{A}\hat{B}\hat{C}] =$ Sp$[\hat{C}\hat{A}\hat{B}] =$ Sp$[\hat{B}\hat{C}\hat{A}]$ aber i.A. $\neq$ Sp$[\hat{A}\hat{C}\hat{B}]$
- Sp$[\hat{A} + \hat{B}] =$ Sp$[\hat{A}]$+Sp$[\hat{B}]$
- Sp$[\hat{A}^\dagger] =$ Sp$[\hat{A}]^*$