

[Abgabe 29.05. vor der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 7.1: Bewegungsgleichung für Erwartungswerte

1. Gegeben sein ein Polynom vom Grad n als Potential $V(x)$. Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{p}, V(\hat{x})]$ und bringen Sie ihn in eine Form, die keine Abhängigkeit vom Operator \hat{p} mehr aufweist.
2. Zeigen Sie für den eindimensionalen Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{x})$ unter Benutzung des Ehrenfestschen Theorems aus der Vorlesung, daß der quantenmechanische Erwartungswert die folgende Bewegungsgleichung erfüllt:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{x} \rangle = -\langle V'(\hat{x}) \rangle .$$

3. Bringen Sie diese Gleichung mit der klassischen Bewegungsgleichung in Beziehung.
-

Aufgabe 7.2: Allgemeine Unschärferelation

Ausgehend von der Schwarzschen Ungleichung in Hilberträumen in Übung 6.2. leiten Sie die folgende allgemeine Unschärferelation her:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle| .$$

Hierbei sind $(\Delta A)^2 \equiv \langle \psi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 | \psi \rangle$ das Quadrat der Varianz der Observablen \hat{A} , und entsprechend für die Observable \hat{B} . Ferner sei deren Kommutator gegeben durch $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$.

Zeigen Sie außerdem, daß \hat{C} hermitesch ist.

Aufgabe 7.3: Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

Gegeben seien zwei Operatoren \hat{A}, \hat{B} eines Hilbertraumes V , die folgende Kommutatorrelationen erfüllen:

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] .$$

Verifizieren Sie die folgende Gleichung, die einen Spezialfall der allgemeineren Baker-Campbell-Hausdorff-Formel darstellt:

$$\exp[\hat{A}] \exp[\hat{B}] = \exp[\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]] .$$

[Hinweis: Betrachten Sie zunächst die operatorwertige Funktion

$\hat{D}(t) \equiv \exp[-t(\hat{A} + \hat{B})] \exp[t\hat{A}] \exp[t\hat{B}]$. Leiten Sie unter Benutzung von Übung 6.3 die folgende Differentialgleichung her: $\frac{d}{dt} \hat{D}(t) = t[\hat{A}, \hat{B}] \hat{D}$. Lösen Sie dann diese Gleichung und setzen Sie am Ende $t = 1$.]