**Blatt Nr. 07** Übungen zu den mathematischen Methoden der Physik 29.11.2016

[ Besprechung in den Übungen am 06. u. 07.12.2016 ]

**Aufgabe 7.1: Integration mittels Residuensatz**
Bestimmen Sie das folgende Integral mittels Residuensatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 - x + 1} \ .$$

**Aufgabe 7.2: Residuen und Pole**
Bestimmen Sie das Residuum der folgenden Funktionen:

1. $f(z) = \sin(mx)/x^k$ bei $z = 0$ für $m \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.
2. $g(z) = \sin(x)/\cos(x)^k$ an allen Nullstellen des Nenners für $k \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 7.3: Reelle Integrale mit Winkelfunktion**

1. Berechnen Sie das folgende reelle Integral mit $m, a > 0$ als komplexes Konturintegral:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \sin(mx)}{x^2 + a^2}$$
2. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die folgenden Integrale, mit $a, b \in \mathbb{R}$:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos(x)}{(x-a)^2 + b^2} \ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(x)}{(x-a)^2 + b^2}$$

**Aufgabe 7.4: Argumentprinzip**
Beweisen Sie folgende Aussage, die auch Argumentprinzip genannt wird:

Sei $f(z)$ analytisch und nichtverschwindend entlang der geschlossenen Kurve $\gamma$. Ferner sei $f(z)$ analytisch innerhalb von $\gamma$ bis auf endlich viele isolierte Pole (d.h. meromorph innerhalb $\gamma$). Dann gilt

$$\oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} \frac{f'(z)}{f(z)} = N_O - N_P \ ,$$

wobei $N_P$ die Anzahl der Pole und $N_O$ die der Nullstellen inklusive Multiplizitäten innerhalb von $\gamma$ ist.