Blatt Nr. 07 Übungen zu den mathematischen Methoden der Physik 28.11.2017

[Besprechung in den Übungen am 05. u. 06.12.2017]

Aufgabe 7.1: Integration mittels Residuensatz
Bestimmen Sie das folgende Integral mittels Residuensatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 - x + 1} \ .$$

Aufgabe 7.2: Residuen und Pole
Bestimmen Sie das Residuum der folgenden Funktionen:

1. $f(z) = \sin(mz)/z^k$ bei $z = 0$ für $m \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.
2. $g(z) = \sin(z)/\cos(z)^k$ an allen Nullstellen des Nenners für $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7.3: Reelle Integrale mit Winkelfunktion

1. Berechnen Sie das folgende reelle Integral mit $m, a > 0$ als komplexes Konturintegral:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \sin(mx)}{x^2 + a^2}$$
2. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die folgenden Integrale, mit $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos(x)}{(x-a)^2 + b^2} \ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(x)}{(x-a)^2 + b^2}$$

Aufgabe 7.4: Argumentprinzip
Beweisen Sie folgende Aussage, die auch Argumentprinzip genannt wird:

Sei $f(z)$ analytisch und nichtverschwindend entlang der geschlossenen Kurve γ. Ferner sei $f(z)$ analytisch innerhalb von γ bis auf endlich viele isolierte Pole (d.h. meromorph innerhalb γ). Dann gilt

$$\oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} \frac{f'(z)}{f(z)} = N_O - N_P \ ,$$

wobei N_P die Anzahl der Pole und N_O die der Nullstellen inklusive Multiplizitäten innerhalb von γ ist.