Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 08**	29.05.2018

[Abgabe 05.06. *vor* der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 8.1: Der Statistische Opertor in einem Zweizustandssystem
Wir betrachten einen endlichdimensionalen Hilbertraum, der die folgende Basis aus zwei orthonormierten Zuständen hat: $\{|\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}\rangle\}$. Gegeben sei nun der folgende reine Zustand $|\psi\rangle \equiv (e^{i\alpha}|\frac{1}{2}\rangle + e^{i\beta}| - \frac{1}{2}\rangle)/\sqrt{2}$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, daß der Zustand $|\psi\rangle$ richtig normiert ist.

2. Begründen Sie die Notation für den dazugehörigen statistischen Operator

$$\hat{\rho}_\psi \equiv |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{i(\alpha-\beta)} \\ e^{-i(\alpha-\beta)} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Zeigen Sie, daß gilt Sp$[\hat{\rho}_\psi] = 1 =$ Sp$[\hat{\rho}_\psi^2]$.

4. Wir definieren nun den gemittelten statistischen Operator $\hat{\rho}_G \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha\hat{\rho}_\psi]$. Begründen Sie, daß dieser einem gemischten Zustand entspricht, indem Sie folgende Gleichungen zeigen: Sp$[\hat{\rho}_G^2] < 1$ und Sp$[\hat{\rho}_G] = 1$.

Aufgabe 8.2: Eigenschaften der Spur
Zeigen Sie, daß die in der Vorlesung definierte Spur weitere einfache Eigenschaften besitzen:

- Sp$[\hat{A}_H(t)] =$ Sp$[\hat{A}]$
- Sp$[\hat{A}\hat{B}\hat{C}] =$ Sp$[\hat{C}\hat{A}\hat{B}] =$ Sp$[\hat{B}\hat{C}\hat{A}]$ aber i.A. $\neq$ Sp$[\hat{A}\hat{C}\hat{B}]$
- Sp$[\hat{A} + \hat{B}] =$ Sp$[\hat{A}]$+Sp$[\hat{B}]$
- Sp$[\hat{A}^\dagger] =$ Sp$[\hat{A}]^*$

Aufgabe 8.3: Eigenwerte eines normierten Opertors
Gegeben sei ein hermitescher Operator $\hat{P} = \hat{P}^\dagger$, der normiert ist Sp$[\hat{P}] = 1$ und $\hat{P}^2 = \hat{P}$ erfülle.

- Zeigen Sie, daß die einzigen möglichen Eigenwerte 0 und 1 sind.
- Zeigen Sie weiterhin, daß es nur einen linear unabhängigen Eigenzustand zum Eigenwert 1 geben kann.