

[Abgabe 11.06. in H6 vor der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 9.1: Drehungen im Ortsraum des \mathbb{R}^3

Es beschreibe $R(\vec{n}, \alpha) \vec{r} = \vec{r}'$ eine Drehung in 3 Dimensionen um die Achse \vec{n} , mit $|\vec{n}| = 1$ und Winkel α .

1. Zeigen Sie, daß Folgendes gilt:

$$R(\vec{n}, \alpha)\vec{r} = \cos(\alpha)\vec{r} + (1 - \cos(\alpha))(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + \sin(\alpha)\vec{n} \times \vec{r}.$$

Benutzen Sie dies, um zu zeigen, daß so das Einselement $R(\vec{n}, 0) = \mathbb{1}_3$ sowie die Inverse dargestellt werden: $R(\vec{n}, -\alpha)R(\vec{n}, \alpha) = \mathbb{1}_3$.

2. Für infinitesimale Drehungen um $|\alpha| \ll 1$ gilt $R(\vec{n}, \alpha) \approx \mathbb{1}_3 - i\alpha\vec{n} \cdot \vec{\Sigma}$, wobei

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie folgende Vertauschungsrelationen dieser Matrizen $[\Sigma_j, \Sigma_k] = i\varepsilon_{jkl}\Sigma_l$.

Überprüfen Sie außerdem, daß für Drehungen um die z -Achse $\vec{n} = \vec{e}_3$ für beliebige Winkel diese Darstellung für endliche Drehungen gilt: $R(\vec{e}_3, \alpha) = \exp[-i\alpha\Sigma_3]$.

Hinweis: Eine Drehung des Vektors \vec{r} um den Winkel α in \mathbb{R}^3 um eine beliebige Achse \vec{n} kann wie folgt dargestellt werden: $R(\vec{n}, \alpha)\vec{r} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}) + \cos(\alpha)(\vec{n} \times \vec{r}) \times \vec{n} + \sin(\alpha)(\vec{n} \times \vec{r})$

Aufgabe 9.2: Vertauschungsrelationen des Bahndrehimpulses

Der Bahndrehimpuls ist definiert durch $\hat{L}_i = (\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}})_i = \varepsilon_{ijk}\hat{r}_j\hat{p}_k$. Benutzen Sie die kanonischen Vertauschungsrelationen für Orts- und Impulsoperator, $[\hat{r}_j, \hat{r}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k]$ und $[\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{j,k}$, um folgende Relationen zu zeigen:

- $[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\hat{L}_l$
- $[\hat{L}^2, \hat{L}_j] = 0$, $[\hat{r}^2, \hat{L}_j] = 0$, und $[\hat{p}^2, \hat{L}_j] = 0$, für $j = 1, 2, 3$

Aufgabe 9.3: Rotationssymmetrische Hamiltonoperatoren

Wir betrachten Hamiltonoperatoren von der Form

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\vec{r}).$$

Diese heißen Rotationssymmetrisch, falls sie mit den Erzeugenden von Rotationen, den Komponenten des Bahndrehimpulses vertauschen, d.h. wenn gilt:

$$[\hat{H}, \hat{L}_j] = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, 3.$$

Unter welcher Voraussetzung ist dies der Fall?