Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 09**	05.06.2018

[Abgabe 12.06. *vor* der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 9.1: Der harmonische Oszillator

Wir betrachten den Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + mw^2\hat{x}^2/2$ des harmonischen Oszillators sowie dessen Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a} = \sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar mw}}\hat{p}$. Es seien $|n\rangle$ die normierten Eigenzustände von $\hat{N}$, mit $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

1. Zeigen Sie, daß $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ gilt und deshalb $|n=0\rangle$ dem Grundzustand entspricht (dieser erfüllt $\hat{N}|0\rangle = 0$ sowie insbesondere $\hat{a}|0\rangle = 0$).
2. Ermitteln Sie für den Zustand $|n\rangle$ die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$, und $\langle\hat{p}^2\rangle$. Vergleichen Sie die Erwartungswerte $\left\langle\frac{1}{2m}\hat{p}^2\right\rangle$ der kinetischen und $\left\langle\frac{mw^2}{2}\hat{x}^2\right\rangle$ der potentiellen Energie mit der Gesamtenergie.
3. Berechnen Sie hieraus $\Delta x\ \Delta p$ und vergleichen Sie mit der Unschärferelation.

Aufgabe 9.2: Zeitentwicklung des harmonischen Oszillators

1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Reihenentwicklung aus der Übung 6.3 die Zeitentwicklung des Ortsoperators des Harmonischen Oszillators im Heisenbergbild
$$\hat{x}_H(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right]\hat{x}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right] ,$$
wobei $\hat{H}$ der Hamiltonoperator aus Aufgabe 9.1. ist.
2. Betrachten Sie die heisenbergschen Bewegungsgleichungen für Orts- und Impulsoperator des harmonischen Oszillators:
$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{x}_H(t) = [\hat{x}_H(t), \hat{H}] , \quad i\hbar\frac{d}{dt}\hat{p}_H(t) = [\hat{p}_H(t), \hat{H}] .$$
Ausgehend von der Tatsache, daß $\hat{H} = \hat{H}_H$ und damit $\hat{H}$ durch $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ statt durch $\hat{x}$ und $\hat{p}$ ausgedrückt werden kann, bestimmen Sie direkt die Lösung $\hat{x}_H(t)$, unter Benutzung von $[\hat{x}_H(t), \hat{p}_H(t)] = i\hbar$.
Vergleichen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{x}_H(t)\rangle$ mit der Lösung der klassischen Bewegungsgleichung.

Aufgabe 9.3: Auf- und Absteigeoperatoren

Betrachten Sie die Algebra des Auf - und Absteigeoperators $\hat{b}^\dagger$ und $\hat{b}$, wobei $\hat{b}'\hat{b} + \hat{b}\hat{b}' \equiv \{\hat{b}', \hat{b}\}$ der Anti-kommutator ist: $\{\hat{b}, \hat{b}\} = 0$, $\{\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger\} = 0$, $\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1$ und $\hat{Q} = \hat{b}^\dagger\hat{b}$.

- Welches Spektrum und welche Eigenzustände hat $\hat{Q}$?
- Schlagen Sie eine physikalische Interpretation dieses Systems vor.