Blatt Nr. 09 Übungen zu den mathematischen Methoden der Physik 12.12.2017

[Besprechung in den Übungen am 19. u. 20.12.2017]

Aufgabe 9.1: Kramers-Kronig Relation
Betrachten Sie komplexwertige Funktionen einer Variablen $f(x) = u(x) + iv(x)$, für die gilt dass $f(x)^* = f(-x)$. Benutzen Sie die Kramers-Kronig Relation für $f(x)$, um das folgende asymptotische Verhalten für $k_0 \to \infty$ zu zeigen:

$$u(k_0) \sim \frac{-2}{\pi k_0^2} \int_0^\infty dk\, kv(k) \ ,$$

$$v(k_0) \sim \frac{2}{\pi k_0} \int_0^\infty dk\, u(k) \ .$$

Aufgabe 9.2: Analytische Fortsetzung

1. Zeigen Sie, dass

   $$\int_0^\infty dx \cos(x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \int_0^\infty dx \sin(x^2)$$

   gilt, indem Sie entlang des Randes des folgenden Sektors $S_{\pi/4}(R)$ integrieren: $S_{\pi/4}(R) = \{z = re^{i\phi} \in \mathbb{C} : 0 < r < R, 0 < \phi < \frac{\pi}{4}\}$

2. Bekanntermassen ergibt das Gaußsche Integral $I(a) = \int_{-\infty}^\infty dx \exp[-ax^2] = \sqrt{\pi/a}$. Benutzen Sie das Ergebnis aus 1. um zu zeigen, dass der Wert des folgenden Integrals $\int_{-\infty}^\infty dx \exp[ix^2]$ als analytische Fortsetzung des Gaußschen Integrals interpretiert werden kann.

Aufgabe 9.3: Beispiel Orthonormalbasis
Beweisen Sie, dass die Funktionen

$$\phi_k(x) = \exp[ikx] \ \text{ mit } \ k \in \mathbb{Z} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

orthogonal sind bezüglich des folgenden, Hermiteschen Skalarproduktes:

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx f^*(x) g(x) \ .$$