Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 10**	11.06.2019

[Abgabe 18.06. in H6 *vor* der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 10.1: Bahndrehimpuls und Kugelflächenfunktionen

1. Betrachten Sie den Bahndrehimpuls in Ortsdarstellung $\hat{\vec{L}} = -i\hbar\hat{\vec{r}} \times \vec{\nabla}_{\vec{r}}$.

   (a) Leiten Sie die folgende Darstellung der kartesischen Komponenten $\hat{L}_{x,y,z} = \hat{L}_{1,2,3}$ ausgedrückt in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) her:

   $$\hat{L}_x = -i\hbar\left(-\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos(\varphi)\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
   $$\hat{L}_y = -i\hbar\left(+\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin(\varphi)\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
   $$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \ .$$

   (b) Verifizieren Sie die Vertauschungsrelation $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$ in der obigen Darstellung.

2. Betrachten Sie die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ für $l = 0$ und $l = 1$.

   (a) Bestimmen Sie die normierte Kugelflächenfunktion $Y_{0,0}(\theta, \varphi)$.

   (b) Zeigen Sie, daß $Y_{1,1}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)e^{i\varphi}$ gilt, indem Sie die Gleichung $\hat{L}_+ Y_{1,1}(\theta, \varphi) = 0$ lösen und die Normierungsbedingung benutzen.

   (c) Ausgehend vom Ergebnis aus 2(b) benutzen Sie $\hat{L}_-$, um $Y_{1,0}(\theta, \varphi)$ und $Y_{1,-1}(\theta, \varphi)$ zu bestimmen.

   (d) Verifizieren Sie explizit mittels 1(a), daß $\hat{L}_- Y_{1,-1}(\theta, \varphi) = 0$ gilt.

   (e) Wie sehen die zu $Y_{1,m}(\theta, \varphi)$ gehörenden Wahrscheinlichkeitsdichten aus für $m = 1, 0, -1$?

Aufgabe 10.2: Vertauschungsrelationen von Bahndrehimpuls und Impuls
Zeigen Sie, daß die Operatoren $\hat{L}_3$ und $\hat{p}_3$ vertauschen und bestimmen Sie die Funktionen, die gleichzeitig zu beiden Operatoren Eigenzustände sind.

Aufgabe 10.3: Erwartungswerte von Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen
Betrachten Sie ein Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen und nehmen Sie an, daß es sich in folgendem Zustand befindet

$$|\psi\rangle = \alpha\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \beta\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta = const.$$

Bestimmen Sie $\langle\hat{S}_x^2\rangle$ unter der Voraussetzung, daß $\langle\hat{S}_z\rangle = 0$ ist.