Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 10**	12.06.2018

[Abgabe 19.06. **bis 10:00 Uhr in E5-108** mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 10.1: Drehungen im Ortsraum des $\mathbb{R}^3$
Es beschreibe $R(\vec{n},\alpha)\ \vec{r} = \vec{r}\,'$ eine Drehung in 3 Dimensionen um die Achse $\vec{n}$, mit $|\vec{n}| = 1$ und Winkel α.

1. Zeigen Sie, daß Folgendes git:

   $R(\vec{n},\alpha)\vec{r} = \cos(\alpha)\vec{r} + (1-\cos(\alpha))(\vec{n}\cdot\vec{r})\vec{n} + \sin(\alpha)\vec{n}\times\vec{r}.$

   Benutzen Sie dies, um zu zeigen, daß so das Einselement $R(\vec{n},0) = 1\!\!|_3$ sowie die Inverse dargestellt werden: $R(\vec{n},-\alpha)R(\vec{n},\alpha) = 1\!\!|_3$.

2. Für infinitesimale Drehungen um $|\alpha| \ll 1$ gilt $R(\vec{n},\alpha) \approx 1\!\!|_3 - i\alpha\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}$, wobei

   $$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Verifizieren Sie folgende Vertauschungsrelationen dieser Matrizen $[\Sigma_j,\Sigma_k] = i\varepsilon_{jkl}\Sigma_l$.

   Überprüfen Sie außerdem, daß für Drehungen um die z-Achse $\vec{n} = \vec{e}_3$ für beliebige Winkel diese Darstellung für endliche Drehungen gilt: $R(\vec{e}_3,\alpha) = \exp[-i\alpha\Sigma_3]$.

Aufgabe 10.2: Vertauschungsrelationen des Bahndrehimpulses
Der Bahndrehimpuls ist definiert durch $\hat{L}_i = (\hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{p}})_i = \varepsilon_{ijk}\hat{r}_j\hat{p}_k$. Benutzen Sie die kanonischen Vertauschungsrelationen für Orts- und Impulsoperator, $[\hat{r}_j,\hat{r}_k] = 0 = [\hat{p}_j,\hat{p}_k]$ und $[\hat{r}_j,\hat{p}_k] = i\hbar\delta_{j,k}$, um folgende Relationen zu zeigen:

- $[\hat{L}_j,\hat{L}_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\hat{L}_l$
- $[\hat{\vec{L}}^2,\hat{L}_j] = 0$, $[\hat{\vec{r}}^2,\hat{L}_j] = 0$, und $[\hat{\vec{p}}^2,\hat{L}_j] = 0$, für $j = 1,2,3$

Aufgabe 10.3: Rotationssymmetrische Hamiltonoperatoren
Wir betrachten Hamiltonoperatoren von der Form

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^2 + V(\vec{r}).$$

Diese heißen Rotationssymmetrisch, falls sie mit den Erzeugenden von Rotationen, den Komponenten des Bahndrehimpulses vertauschen, d.h. wenn gilt:

$$[\hat{H},\hat{L}_j] = 0 \text{ für } j = 1,2,3.$$

Unter welcher Voraussetzung ist dies der Fall?