Blatt Nr. 10	Übungen zu den mathematischen Methoden der Physik	20.12.2017

[Besprechung in den Übungen am 10. u. 11.01.2016]

Aufgabe 10.1: Beispiel Orthonormalbasis
Beweisen Sie, dass die Funktionen $\phi_k(x) = \exp[ikx]$, mit $k \in \mathbb{Z}$ und x reel, orthogonal sind bezüglich des folgenden, Hermiteschen Skalarproduktes sind:

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} dx f^*(x) g(x) \; .$$

Aufgabe 10.2: Beispiel Skalarprodukt

1. Zeigen Sie, dass
$$\langle f|g\rangle = \int_0^{\infty} dx \exp[-x] f(x) g(x)$$
für geeignete Funktionen ein Skalarprodukt definiert.

2. Betrachten Sie die Menge der reellen Polynome von Grad 2, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Überzeugen Sie sich davon, dass diese einen Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation bilden.

   Warum bilden die folgenden Monome eine Basis: $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, und $f_2(x) = x^2$? Konstruieren Sie mittels Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis bezüglich des Skalarproduktes aus 10.2.1.

Aufgabe 10.3: Dirac-δ Darstellungen
Überprüfen Sie, dass die folgende Funktionen $f_\epsilon(x)$ im Grenzwert $\epsilon \to 0$ eine Darstellung der δ-Funktion sind:

1. $f_\epsilon(x) = \exp[-|x|/\epsilon]/(2\epsilon)$
2. $f_\epsilon(x) = \exp[-x^2/\epsilon]/\sqrt{\epsilon\pi}$
3. $f_\epsilon(x) = \begin{cases} (\epsilon - |x|)/\epsilon^2 & \text{für } |x| \le \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
4. $f_\epsilon(x) = \epsilon \sin^2(x/\epsilon)/(\pi x^2)$