Blatt Nr. 10 Übungen zu den mathematischen Methoden der Physik 19.12.2017

[Besprechung in den Übungen am 09. u. 10.01.2018]

Aufgabe 10.1: Beispiel Skalarprodukt und Gram-Schmidt-Verfahren

1. Zeigen Sie, dass
$$\langle f|g\rangle = \int_0^\infty dx \exp[-x] f(x) g(x)$$
für geeignete Funktionen ein Skalarprodukt definiert.

2. Betrachten Sie die Menge der reellen Polynome von Grad 2, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Zeigen Sie, dass diese einen Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation bilden.

   Warum bilden die folgenden Monome eine Basis: $f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x$, und $f_2(x) = x^2$? Konstruieren Sie mittels Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis bezüglich des obigen Skalarproduktes aus Aufgabenteil 10.1.1.

Aufgabe 10.2: Beispiele Delta-Funktion
Berechnen Sie folgende Integrale:

$$1) \qquad \int_0^{3\pi} dx\ x^2 \delta(\cos(x))$$

$$2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp[-x^2] \delta(x^2 - 1)$$

Aufgabe 10.3: Dirac-δ Darstellungen
Überprüfen Sie wie in der Vorlesung, dass die folgende Funktionen $f_\epsilon(x)$ im Grenzwert $\epsilon \to 0$ eine Darstellung der δ-Funktion sind:

1. $f_\epsilon(x) = \exp[-|x|/\epsilon]/(2\epsilon)$
2. $f_\epsilon(x) = \exp[-x^2/\epsilon]/\sqrt{\epsilon\pi}$
3. $f_\epsilon(x) = \begin{cases} (\epsilon - |x|)/\epsilon^2 & \text{für } |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
4. $f_\epsilon(x) = \epsilon \sin^2(x/\epsilon)/(\pi x^2)$

Aufgabe 10.4: Fourierreihe der Delta-Funktion
Berechnen Sie die Fourierreihe $D(x)$ zur Delta-Funktion $\delta(x)$ auf dem Intervall $[-\pi, +\pi]$ und zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) D(x) = f(0)\ ,$$

für Testfunktionen $f(x)$ auf diesem Intervall.
[Hinweis: stellen Sie auch $f(x)$ durch eine Fourierreihe dar.]