| Übungen zu Rechenmethoden der Physik | **Blatt Nr. 10** | 13.06.2013 |
|---|---|---|

[ Abgabe 20.06. in H12 **vor** der Vorlesung ]
**Bitte mit Namen, Vornamen und Ihrem Gruppenbuchstaben A-F**

**Aufgabe 10.1: Zweidimensionale Vektorfelder** (3 Punkte)
Anhand eines skalaren Feldes $\phi(x, y)$ können wir mittels Gradientenbildung ein Vektorfeld definieren: $\vec{E} \equiv -\vec{\nabla}\phi(x, y)$.

Berechnen Sie dieses Vektorfeld für die beiden unten angegebenen Skalarfelder und skizzieren Sie es anschliessend in der $(x, y)$-Ebene. Bestimmen Sie außerdem jeweils $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi(x, y)$:

1. $\phi(x, y) = x^2 - y^2$
2. $\phi(x, y) = 2xy$

(In der Elektrostatik sind elektrische Felder immer auf die oben angegebene Weise durch Skalarfeld-Potentiale gegeben. Zusätzlich müssen sie allerdings im Vakuum die Laplace-Gleichung erfüllen.)

**Aufgabe 10.2: Hesse-Matrix und lokale Extrema** (3 Punkte)
Gegeben ist folgendes Skalarfeld im $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = y^3 + xy + x^2.$$

1. Bestimmen sie den Gradienten von $f$, die Hesse-Matrix von $f$ sowie deren Eigenwerte.
2. Gibt es lokale Extrema von $f$ in $\mathbb{R}^2$, wo liegen diese und um welche Art von Extremum handelt es sich (lokales Minimum, Maximum oder Sattelpunkt)?

**Aufgabe 10.3: Vektoridentitäten** (6 Punkte)
Beweisen Sie die drei folgenden Identitäten im $\mathbb{R}^3$:

1. Gegeben sei $\vec{B}(\vec{r})$ mit $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$. Dann gilt
$$\partial_j \left( \delta_{ij} \frac{1}{2} \vec{B}^2 - B_i B_j \right) = (\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}))_i \ .$$
(Hinweis: benutzen Sie ein der Identitäten aus der Präsenzübung 0.3)
2. Gegeben sei der konstante Vektor $\vec{B}$. Dann gilt:
$$-\frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{B}) = \vec{B} \ .$$
3. Berechnen Sie das Feld eines magnetischen Dipols durch Herleiten von:
$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{\mu} r^2}{r^5} \ ,$$
wobei $r = |\vec{r}|$ die Norm und $\vec{\mu}$ ein konstanter Vektor ist.