Übungen zur Theoretischen Physik II **Blatt Nr. 11** 18.06.2019

[Abgabe 25.06. in H6 *vor* der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 11.1: Pionen

1. Die up- und down-Quarks u und d haben abgesehen von ihrer elektrischen Ladung fast dieselben Eigenschaften. Diese Tatsache führt näherungsweise zu einer $SU(2)$ Symmetrie, die als Isospin bezeichnet wird. Wir identizifieren die Zustände u als $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ und d als $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, sowie deren Antiteilchen $\bar{u}$ als $+|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ und $\bar{d}$ als $-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$. Pionen sind gebundene Zustände aus je einem Quark und Anti-Quark, gegeben durch folgende Isospinzustände: $\pi^+ = |1, 1\rangle$, $\pi^- = |1, -1\rangle$ und $\pi^0 = |1, 0\rangle$.

   (a) Leiten Sie die folgende Beziehung her (ohne Benutzung der Tabelle der Clebsch-Gordon-Koeffizienten):

$$\begin{aligned}
|1,1\rangle &= |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \;, \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\right), \\
|1,-1\rangle &= |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \;, \\
|0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\right),
\end{aligned}$$

   (b) Schreiben Sie π^+, π^- und π^0 als Linearkombination von $u\bar{u}$, $u\bar{d}$, $d\bar{u}$ und $d\bar{d}$.

   (c) Welchen Isospin hat der Zustand $u\bar{u} + d\bar{d}$?

2. Betrachten Sie nun Zustände mit zwei Pionen, und zwar $|\pi^+\pi^-\rangle$, $|\pi^-\pi^+\rangle$, $|\pi^0\pi^0\rangle$, $|\pi^+\pi^0\rangle$ und $|\pi^0\pi^+\rangle$. Schreiben Sie diese als Linearkombinationen der Zustände $|2, m\rangle$, $|1, m\rangle$ und $|0, 0\rangle$ [Hinweis: Sie dürfen die Tabelle der Clebsch-Gordon-Koeffizienten benutzen, siehe 1×1].

Aufgabe 11.2: Hamilton-Operator mit Trägheitsmomenten

Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_1^2}{2I_1} + \frac{\hat{L}_2^2}{2I_2} + \frac{\hat{L}_3^2}{2I_3} \;.$$

Er bescheibt die Bewegung eines freien starren Körpers, wobei die Hauptträgheitsmomente $I_{j=1,2,3}$ konstant seien. Unter welchen Umständen ist $\langle \hat{L}_1 \rangle$ zeitunabhängig?

Aufgabe 11.3: System aus Spin 1 Teilchen
Wir betrachen den Hamilton-Operator von zwei Spin 1 Teilchen gegeben durch

$$\hat{H} = A\mathbb{1}_3 + B\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{S}}' + C(\hat{S}_3 + \hat{S}'_3) \ ,$$

mit A, B und C konstant. Bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte von $\hat{H}$, indem Sie zunächst die Operatoren ermitteln, die mit $\hat{H}$ vertauschen.