Übungen zur Elementarteilchenphysik	**Blatt Nr. 11**	16.01.2015

[Übungsgruppen Donnerstag 22.01. 08-10 und 16-18 in D6-135]

Aufgabe 11.1: Tadpole-Integral
Betrachten Sie folgendes durch den Parameter $\Lambda \gg 1$ abgeschnittene Integral:

$$A(m, \Lambda) \equiv \int_{|\vec{k}|<\Lambda} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \,,$$

wobei $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$ und $\varepsilon > 0$ ein infinitesimaler Parameter ist. Wie verhält sich dieses Integral für $\Lambda \gg m$? [Hinweis: das k_0-Integral lässt sich am einfachsten mittels Residuensatz berechnen.]

Aufgabe 11.2: Bubble-Integral
Betrachten Sie nun mit derselben Notation das Integral

$$B(m, q\Lambda) \equiv \int_{|\vec{k}|<\Lambda} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((q+k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \,.$$

Wie verhält sich das Integral für $\Lambda \gg m, q_0, |\vec{q}|$? [Falls das Integral so zu schwierig ist, nehmen Sie $q^2 \ll m^2$ an und machen Sie eine Taylor-Entwicklung in q^2.]

Aufgabe 11.3: $SU(2)$-Eichinvarianz
Wir betrachten eine reine $SU(2)$-Eichtheorie mit Notation aus der Vorlesung, $T_a = \frac{1}{2}\sigma_a$. Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion $\mathcal{L}_\Phi = (D_\rho \Phi(x))^\dagger D^\rho \Phi(x)$ mit der kovarianten Ableitung $D_\rho = \partial_\rho - igT_a W_\rho^a(x)$ invariant unter folgenden lokalen Transformationen ist:

$$\Phi(x) \to \Phi(x)' = U(x)\Phi(x) \quad \text{mit} \quad U(x) \equiv \exp[-i\beta_a(x)T_a] \quad \text{und} \quad \beta_{a=1,2,3}(x) \in \mathbb{R},$$

$$T_a W_\rho^a(x) \to T_a W_\rho^a(x)' = U(x) T_a W_\rho^a(x) U(x)^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\rho U(x))U(x)^\dagger.$$

Beweisen Sie hiermit die Transformation $D_\rho \Phi(x) \to D'_\rho \Phi(x)' = U(x) D_\rho \Phi(x)$, aus der dann die Invarianz von $\mathcal{L}_\Phi$ folgt. [Die Invarianz des kinetischen Terms $\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\,\mu\nu}$ von W_μ^a lässt sich anhand von infinitesimalen Transformationen beweisen. Dies wird in der Übung gezeigt werden.]

Aufgabe 11.4: Schwache Hyperladung
Verifizieren Sie die in der Vorlesung angegebene Tabelle für die schwache Hyperladung Y_W. Benutzen Sie hierzu die Ihnen bekannten elektrischen Ladungen Q der Leptonen, Quarks und des Higgs sowie die in der Vorlesung angegebenen z-Komponenten I_z^W der $SU(2)_L$, sowie den Zusammenhang zwischen den Quantenzahlen $Q = I_z^W + Y_W$.