Übungen zu Rechenmethoden der Physik	**Blatt Nr. 11**	20.06.2014

[Abgabe 27.06. in H12 **vor** der Vorlesung]

Bitte mit Namen, Vornamen und Ihrem Gruppenbuchstaben A-F

Aufgabe 11.1: Quellen- und Wirbelfreiheit von Strömen (4 Punkte)
Wir betrachten Skalarfelder $\phi(r)$, die nur vom Abstand $r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ im $\mathbb{R}^3$ abhängen.

1. Überprüfen Sie, daß gilt:
$$\vec{\nabla} \cdot (\phi(r)\vec{r}) = 3\phi(r) + r\phi'(r) \ .$$

2. Ermitteln Sie solche Funktionen $\phi(r)$, die einen quellenfreien Strom $\vec{j}(\vec{r}) = \phi(r)\vec{r}$ erzeugen und skizzieren Sie diesen Strom für $r \neq 0$.

3. Zeigen Sie, daß $\vec{j}(\vec{r}) = \phi(r)\vec{r}$ für beliebiges $\phi(r)$ wirbelfrei ist.

Aufgabe 11.2: Linienintegral (4 Punkte)
Wir betrachten eine Raumkurve C im $\mathbb{R}^3$, die durch folgende Parabel in der xy-Ebene gegeben ist: $y(x) = 3x^2$. Als Anfangspunkt für C wählen wir den Ursprung, und als Endpunkt den Vektor auf der Kurve mit Parameterwert $x = 1$. Ferner sind 2 Vektoren gegeben: $\vec{E}_1 = (y(x), -x, 1)$ und $\vec{E}_2 = (0, 0, y^{\frac{2}{5}}(x))$.

1. Skizzieren Sie die Raumkurve mit Anfangs- und Endpunkt. Parametrisieren Sie C durch Angabe von $\vec{r}(x, y, z)$ und berechnen Sie die Bogenlänge zwischen den beiden Punkten (Hinweis: benutzen Sie partielle Integration und die Tabelle der Stammfunktionen auf Seite 49 im Skript zur Lösung des Integrals).

2. Bestimmen Sie das folgende Linienintegral der beiden Vektorfelder
$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{E}_j \ , \quad j = 1, 2 \ .$$

Aufgabe 11.3: Hauptsatz und Wegunabhängigkeit (4 Punkte)
Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F} = (2x, 2y, 0)$ im $\mathbb{R}^3$. Wir bestimmen nun das Linienintegral $W_{1,2} = \int_{C_{1,2}} d\vec{r} \cdot \vec{F}$ entlang zweier verschiedener Wege $C_{1,2}$, mit gleichen Anfangs- und Endpunkten. Wenn $\vec{F}$ ein konservatives Kraftfeld ist, d.h. $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ gilt, sollte der Wert von $W_1 = W_2$ sein.

1. Berechnen Sie W_1 mit C_1 gegeben durch die Gerade vom Ursprung $\vec{0}$ zum Punkt $\vec{P}_1 = (1, 1, 0)$ und skizzieren Sie C_1.

2. Bestimmen Sie W_2, wobei der Weg C_2 diesmal durch die Gerade vom Urpsrung zu $\vec{P}_2 = (1, 0, 0)$, und dann von Punkt $\vec{P}_2$ zu $\vec{P}_1$ gegeben ist. Skizzieren Sie außerdem C_2.

3. Bestimmen Sie $\phi(\vec{r})$ und verifizieren Sie den Hauptsatz für Linienintegrale indem Sie zeigen, daß $W_{1,2} = \phi(\vec{P}_1) - \phi(\vec{0})$ gilt.