

[ Abgabe 02.07. in H6 vor der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname ]

### Aufgabe 12.1: Eigenschaften des Wasserstoffatoms

- Wir bezeichnen mit  $a = \hbar^2/(\mu e^2)$  den Bohrschen Radius und mit  $R_{n,l}(r)$  die Radialwellenfunktion für den Energieeigenzustand mit Hauptquantenzahl  $n$  und Bahndrehimpulsquantenzahl  $l$ .
  - Bestimmen Sie ausgehend von den Ergebnissen aus der Vorlesung die normierten Funktionen  $R_{1,0}(r)$ ,  $R_{2,0}(r)$  und  $R_{2,1}(r)$ .
  - Sind diese orthogonal zueinander, und wenn nicht warum nicht?
- Zeigen Sie, daß der Bohrsche Radius den wahrscheinlichsten Wert des Elektron-Proton Abstandes im Grundzustand darstellt, d.h. daß  $r^2 R_{1,0}(r)^2$  für  $r = a$  maximal wird.
  - Bestimmen Sie den minimalen Wert des effektiven Potentials

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r},$$

und vergleichen Sie das Ergebnis mit den Energieeigenwerten  $E_n$  des Wasserstoffatoms. Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang den eingeschränkten Wertebereich  $l = 0, 1, \dots, n-1$ .

### Aufgabe 12.2: Zwei harmonische Oszillatoren in 3D

Zeigen Sie, daß sich ein Zweiteilchensystem harmonischer Oszillatoren gleicher Frequenz  $w$  in drei Dimensionen wie folgt in Relativ- und Schwerpunktbewegung aufspalten lässt:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \hat{P}^2 + \frac{1}{2\mu} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} M w^2 \vec{R}^2 + \frac{1}{2} \mu w^2 \vec{r}^2$$

Hierbei sind  $M = m_1 + m_2$  Gesamtmasse und  $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$  die reduzierte Masse.

Berechnen Sie anschließend den Energieeigenwert  $E_0$  des Grundzustandes der Relativbewegung.

### Aufgabe 12.3: Virial-Satz im Coulomb-Potential

Zeigen Sie, daß für das Coulomb-Potential der folgende Virial-Satz in der Quantenmechanik gilt, der die Erwartungswerte von kinetischer Energie  $\hat{T} = \frac{1}{2\mu} (\hat{p})^2$  und potentieller Energie  $V(\hat{r})$  in Beziehung setzt:

$$\langle \hat{T} \rangle = -\frac{1}{2} \langle V(\hat{r}) \rangle.$$

[Hinweis: Im Energieeigenzustand sind Erwartungswerte wie  $\langle \hat{r} \cdot \hat{p} \rangle$  zeitunabhängig. Benutzen Sie das Ehrenfestsche Theorem, um diesen Sachverhalt auszudrücken und berechnen Sie den dann auftauchenden Kommutator.]