Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 12**	21.06.2019

[Abgabe 28.06. im Lernraum +]

Aufgabe 12.1: Eigenschaften des Wasserstoffatoms (5 Punkte)

1. Wir bezeichnen mit $a = \hbar^2/(\mu e^2)$ den Bohrschen Radius und mit $R_{n,l}(r)$ die Radialwellenfunktion für den Energieeigenzustand mit Hauptquantenzahl n und Bahndrehimpulsquantenzahl l.

   (a) Bestimmen Sie ausgehend von den Ergebnissen aus der Vorlesung die normierten Funktionen $R_{1,0}(r)$, $R_{2,0}(r)$ und $R_{2,1}(r)$.

   (b) Sind diese orthogonal zueinander, und wenn nicht warum nicht?

2. (a) Zeigen Sie, daß der Bohrsche Radius den wahrscheinlichsten Wert des Elektron-Proton Abstandes im Grundzustand darstellt, d.h. daß $r^2 R_{1,0}(r)^2$ für $r = a$ maximal wird.

   (b) Bestimmen Sie den minimalen Wert des effektiven Potentials

   $$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r} \ ,$$

   und vergleichen Sie das Ergebnis mit den Energieeigenwerten E_n des Wasserstoffatoms. Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang den eingeschränkten Wertebereich $l = 0, 1, \ldots, n-1$.

Aufgabe 12.2: Zwei harmonische Oszillatoren in 3D
Zeigen Sie, daß sich ein Zweiteilchensystem harmonischer Oszillatoren gleicher Frequenz w in drei Dimensionen wie folgt in Relativ- und Schwerpunktbewegung aufspalten lässt:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}\hat{\vec{P}}^2 + \frac{1}{2\mu}\hat{\vec{p}}^2 + \frac{1}{2}Mw^2\vec{R}^2 + \frac{1}{2}\mu w^2 \vec{r}^2$$

Hierbei sind $M = m_1 + m_2$ Gesamtmasse und $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ die reduzierte Masse.

Berechnen Sie anschließend den Energieeigenwert E_0 des Grundzustandes der Relativbewegung.

Aufgabe 12.3: Hamilton-Operator mit Trägheitsmomenten
Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_1^2}{2I_1} + \frac{\hat{L}_2^2}{2I_2} + \frac{\hat{L}_3^2}{2I_3} \ .$$

Er bescheibt die Bewegung eines freien starren Körpers, wobei die Hauptträgheitsmomente $I_{j=1,2,3}$ konstant seien. Unter welchen Umständen ist $\langle \hat{L}_1 \rangle$ zeitunabhängig?