Blatt Nr. 12 Übungen zu den mathematischen Methoden der Physik 17.01.2017

[Besprechung in den Übungen am 24. u. 25.01.2017]

Aufgabe 12.1: Eigenschaften der Fouriertranformation

1. Zeigen Sie, dass $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}(k)^*$ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass $f(x)$ reel ist.
2. Zeigen Sie, dass $\tilde{f}(-k) = -\tilde{f}(k)^*$ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass $f(x)$ rein imaginär ist.

Aufgabe 12.2: Beispiele Fouriertranformation

Berechnen Sie die Fouriertransformation der folgenden Funktionen:

1. $f(x) = \sqrt{c/\pi}\exp[-cx^2]$ für $c > 0$
2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \ |x| < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

   Benutzen Sie hier ferner die Eigenschaft der Fouriertrafo bezüglich Integration aus der Vorlesung, um folgendes, bekanntes Integral (s. S.59) zu bestimmen: $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \sin^2(x)/x^2$.

Aufgabe 12.3: Fouriertrafo und Integration im Komplexen

Beweisen Sie, dass folgende Fouriertrafo gilt:

$$\frac{h}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{E - i\Gamma/2 - hk}\, e^{-ikt} = \begin{cases} \exp[-\Gamma t/(2h)]\exp[-iEt/h], & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Diese taucht in einer Vielzahl von Problemen in der Quantenmechanik auf.

Aufgabe 12.4: Hin- und Rücktransformation

Zeigen Sie, dass die Funktionen $f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}/\sqrt{(x^2 + a^2)}$ und $\tilde{f}(y) = K_0(a|y|)$ Fouriertransformierte voneinander sind, indem Sie die jeweilige Hin- und Rücktransformation berechnen. Hierbei ist $K_0(x)$ die modifizierte Bessel-funktion zweiter Art, siehe Übung 9.3 für ihre Integraldarstellung.

Zeigen Sie ferner, dass $\int_0^{\infty} dy K_0(y) = \frac{\pi}{2}$ gilt.