Blatt Nr. 12 Übungen zu den mathematischen Methoden der Physik 16.01.2018

[Besprechung in den Übungen am 23. u. 24.01.2018]

Aufgabe 12.1: Beispiel Hin- und Rück-Fouriertransformation
Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}} \quad \text{und} \quad \widetilde{f}(y) = K_0(a|y|)$$

Fouriertransformierte voneinander sind, indem Sie die Hin- und Rücktransformation berechnen. Hierbei ist $K_0(x)$ die modifizierte Bessel-funktion zweiter Art, mit folgender Integraldarstellung:

$$K_0(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dw}{w} \exp[-\frac{s}{2}(w+1/w)] \,.$$

Zeigen Sie ferner, dass $\int_0^\infty dy K_0(y) = \frac{\pi}{2}$ gilt.

Aufgabe 12.2: Differentialgleichung mittels Fouriertranformation
Die eindimensionale Gleichung für Neutronendiffusion mit einer Punktquelle am Ursprung $Q\delta(x)$ lautet:

$$-D\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2} + K^2 D\phi(x) = Q\delta(x) \ .$$

Hierbei ist $\phi(x)$ der Neutronenfluss und D und K sind Konstanten. Lösen Sie diese Gleichung mittels Fouriertransformation.

Aufgabe 12.3: Beispiele Laplacetranformation
Berechnen Sie die Laplacetransformation der folgenden Funktionen:

1. $f(t) = \cosh(at)\cos(at)$
2. $f(t) = \sinh(at)\sin(at)$

Aufgabe 12.4: Inverse Laplacetransformation
Berechnen Sie die inverse Laplace-trafo $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ zu

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \ , \quad a \neq b \ :$$

1. durch Partialbruchzerlegung und bekannte Laplace-trafos (Tabellen)
2. durch explizite Integraldarstellung von $\mathcal{L}^{-1}$