Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 13**	03.07.2018

[Abgabe 10.07. *vor* der Vorlesung mit Gruppen- und Tutorname]

Aufgabe 13.1: Eigenschaften des Wasserstoffatoms

1. Wir bezeichnen mit $a = \hbar^2/(\mu e^2)$ den Bohrschen Radius und mit $R_{n,l}(r)$ die Radialwellenfunktion für den Energieeigenzustand mit Hauptquantenzahl n und Bahndrehimpulsquantenzahl l.

   (a) Bestimmen Sie ausgehend von den Ergebnissen aus der Vorlesung die normierten Funktionen $R_{1,0}(r)$, $R_{2,0}(r)$ und $R_{2,1}(r)$.

   (b) Sind diese orthogonal zueinander, und wenn nicht warum nicht?

2. (a) Zeigen Sie, daß der Bohrsche Radius den wahrscheinlichsten Wert des Elektron-Proton Abstandes im Grundzustand darstellt, d.h. daß $r^2 R_{1,0}(r)^2$ für $r = a$ maximal wird.

   (b) Bestimmen Sie den minimalen Wert des effektiven Potentials

   $$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r} \ ,$$

   und vergleichen Sie das Ergebnis mit den Energieeigenwerten E_n des Wasserstoffatoms. Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang den eingeschränkten Wertebereich $l = 0, 1, \ldots, n-1$.

Aufgabe 13.2: Zwei harmonische Oszillatoren in 3D

Zeigen Sie, daß sich ein Zweiteilchensytem harmonischer Oszillatoren gleicher Frequenz w in drei Dimensionen wie folgt in Relativ- und Schwerpunktbewegung aufspalten lässt:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}\hat{\vec{P}}^2 + \frac{1}{2\mu}\hat{\vec{p}}^2 + \frac{1}{2}Mw^2\vec{R}^2 + \frac{1}{2}\mu w^2 \vec{r}^2$$

Hierbei sind $M = m_1 + m_2$ Gesamtmasse und $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ die reduzierte Masse.

Berechnen Sie anschließend den Energieeigenwert E_0 des Grundzustandes der Relativbewegung.

Aufgabe 13.3: Virial-Satz im Coulomb-Potential

Zeigen Sie, daß für das Coulomb-Potential der folgende Virial-Satz in der Quantenmechanik gilt, der die Erwartungswerte von kinetischer Energie $\hat{T} = \frac{1}{2\mu}(\hat{\vec{p}})^2$ und potentieller Energie $V(\hat{\vec{r}})$ in Beziehung setzt:

$$\langle \hat{T} \rangle = -\frac{1}{2}\langle V(\hat{\vec{r}}) \rangle \ .$$

[Hinweis: Im Energieeigenzustand sind Erwartungswerte wie $\langle \hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{p}} \rangle$ zeitunabhängig. Benutzen Sie das Ehrenfestsche Theorem, um diesen Sachverhalt auszudrücken und berechnen Sie den dann auftauchenden Kommutator.]