Blatt Nr. 14 Übungen zu den mathematischen Methoden der Physik 31.01.2017

[Besprechung in den Übungen am 07.02. u. 08.02.2017]

Aufgabe 14.1: Eigenschaften der Laplacetransformation
Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Laplace-trafo $\mathcal{L}$ von $f(t)$ und seiner Transformierten $F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](p)$:

1. Verschiebung: $\mathcal{L}\left[e^{kt}f(t)\right](p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](p-k)$ für reelles k
2. Integration: Drücken Sie das Integral $\int_s^\infty dp\, F(p)$ durch die Laplace-trafo von $f(t)$ aus. Welche Eigenschaften muß $f(t)$ dazu erfüllen, damit das Integral existiert?
3. Differentiation: Drücken Sie die n-te Ableitung $F^{(n)}(p)$ durch die Laplace-trafo von $f(t)$ aus.

Aufgabe 14.2: Beispiele zur inversen Laplacetransformation
Bestimmen Sie die inverse Laplace-Trafo folgender Funktionen:

1. $F(p) = \frac{k}{p(p^2+k^2)}$ für reelles k
2. $F(p) = (p^2 + a^2)^{-2}$ für reelles a

Aufgabe 14.3: Besselsche Differentialgleichung
Die Besselsche Differentialgleichung hat die folgende Form:

$$tf(t)'' + f(t)' + tf(t) = 0\ ,$$

mit Anfangsbedingungen $f(t=0) = f(t=0)' = 0$. Lösen Sie diese Differentialgleichung mit Laplace-trafo.

[Hinweise: lösen Sie die Dgl., die Sie nach Laplace-trafo erhalten, mittels Trennung der Veränderlichen. Entwickeln Sie diese Lösung in negative Potenzen in p und bestimmen Sie $\mathcal{L}^{-1}$ Term für Term. Überprüfen Sie abschließend, dass die Lösung mit der bekannten Reihendarstellung von $J_0(t)$ übereinstimmt.]