Blatt Nr. 06	Übungen zu den mathematischen Methoden der Physik	21.11.2017

[Besprechung in den Übungen am 28. u. 29.11.2017]

Aufgabe 6.1: Residuensatz
Benutzen Sie den Residuensatz, um das folgende Integral

$$\oint_{\partial\Delta} \frac{dz \exp[-z]}{z^3 + 2z^2 - 3z - 10} ,$$

über den Rand $\partial\Delta$ des Dreieckes Δ zu berechnen, dass durch die Eckpunkte $z = +i$, $z = -i$ und $z = 3$ gegeben ist. Diese sollen in positivem Sinn in dieser Reihenfolge umlaufen werden [Hinweis: eine der Nennernullstellen ist bei $z = 2$.]

Aufgabe 6.2: Taylorentwicklung

1. Zeigen Sie anhand der Eigenschaften der Exponentialfunktion, dass für diese die folgende Taylorreihendarstellung gilt:

$$\exp[z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n .$$

2. Berechnen Sie das folgende komplexe Linienintegral, das den Ursprung mit dem Punkt z in der komplexen Ebene verbindet:

$$\text{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dw \exp[-w^2] .$$

Auf diese Weise erhalten sie die Taylorreihe der komplementären Fehlerfunktion erfc(z) (englisch complementary error function). Dies ist die Stammfunktion von $f(z) = \exp[-z^2]$.

Aufgabe 6.3: Reelle Integration mittels Residuensatz
Berechnen Sie mittels Residuensatz das folgende reelle Integral:

$$\int_0^{\infty} dx \ \frac{x^2}{1 + x^4} .$$

Aufgabe 6.4: Reelles als komplexes Integral
Berechnen Sie das folgende reelle Integral als komplexes Konturintegral über den Einheitskreis [Hinweis: nutzen Sie folgende Parametrisierung $z = \exp[it]$]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin(t)} , \quad \text{mit} \quad a > 1 .$$