Mathematische Methoden der Physik (MMP)

Gernot Akemann

E5-129, 106-6202, akemann@physik.uni-bielefeld.de

Vorlesungen: Dienstags 12^{30} – 14^{00} in T2-205

Donnerstags 12^{30} – 14^{00} in H 11 (nicht am 8. Dez 2016)

Übungen:

Di 8-10 D01-112 A Gruppe A

~~Di 16-18 D01-249~~

Mi 14-16 O6-135 Gruppe B

2 Tutoren: A: Max Bause max.bause@physik.uni-bielefeld.de

B: Tomasz Checinski tomasz.checinski@uni-bielefeld.de

Klausurtermine: Fr 17.02.2017 10-13 H4, Nachklausur Di 21.03.2017 10-13 H4

Stoff der Klausur sind Inhalte der Vorlesung und Übungen.

Übungen: ≥ 50% der Aufgaben bearbeiten, um diese präsentieren zu können: ∃ Ankreuzliste jede Übung, auf Aufforderung werden angekreuzte Lösungen vorgerechnet. Am Ende des Semesters: mindestens 50% aller Aufgaben angekreuzt (u. regelmäßig vorgerechnet) zum Bestehen der Hausübungen

Übungszettel in der Dienstagsvorlesung und zusammen mit Vorlesungsnotizen auf Website Mathem. Physik teaching MMP

Math. Methoden der Physik: Semesterapparat

	Höhere Mathematik (I,II)		
Smirnov, V.	Höhere Mathematik		
	(III,2)	QD101 S641	
Morse,	Methods of theoret.	QD101 S641	178/319050,524229
Feshbach	physics (1,2)	QD100	178/525983
Courant,	Methoden der math.	M886[1,2]	178/0431507,8
Hilbert	Physik (1,2)	QD101	178/0522809,10
Mangoldt,	Höhere Mathematik	C858[1,2]	109/3252952
Knopp	Math. Methoden in der	QA080 M277[4]	178/4168694
Lang, Pucker	Physik	QD080.5 L269	178/4181891
Kerner, von	Mathematik für Physiker	QD080 K39	178/4224208
Wahl	Math. methods for	QD080.5 A685	178/0522549
Arfken, Weber	physicists	QD100 D399	178/1517332
Dennery,	Mathematics for	QD101 F529[1]	109/4111053,
Krzywicki	physicists	QA080 J22,	108/4111053
Fischer, Kaul	Mathematik für Physiker	QB420 J22	
Jänich	(1)		
	Analysis für Physiker		
	und Ingenieure		

Teil I: Funktionentheorie = Analysis mit komplexen Zahlen

[Arfken 6.1, 6.7]

Motivation: • wichtiges Werkzeug um
- reelle Integrale zu lösen
- Differentialgl. reeller Funktionen zu lösen,
z.B. mittels Integraltransformationen wie Fourier und Laplace, deren Inversion benutzt komplexe Analysis
• Differenzierbarkeit in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ ist eine viel stärkere Anforderung als im reellen:
wenn hier die 1. Ableitungen existieren existieren alle Ableitungen → Taylorreihe

V 1. Komplexe Zahlen

Def Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist definiert durch

1. $\mathbb{C}$ ist ein Körper (s.u.) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
2. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
3. $\exists! i : i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$
4. $\forall z \in \mathbb{C}$ $\exists!$ Paar $x, y \in \mathbb{R}$ so daß $z = x + iy = (x, y)$

Es heißen $x = \mathrm{Re}(z)$ Realteil und $y = \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil von z

• Ein Körper ist eine Menge M mit 2 Verknüpfungen + (Addition) und · (Multiplikation), die folgende Eigenschaften $\forall a, b, c \in M$ erfüllen:

1. Kommutativität $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$
2. Assoziativität $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. Distributivität $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. $\exists$ neutrale Elemente 0 für +, 1 für ·: $\forall a \in M$ $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$

5. Existenz des inversen Elements

$\forall a \in M \ \exists (-a): \quad a + (-a) = 0$

$\forall a \in M \setminus \{0\} \ \exists (a^{-1}): \quad a \cdot (a^{-1}) = 1$

Um die Definition von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ zu vervollständigen müssen wir also sagen was + und was · ist:

$z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$

$$\boxed{z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, \ y_1 + y_2)}$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2, \ x_1 y_2 + x_2 y_1)}$$

in jeder Komponente von (,) wird die gewöhnliche Add. u. Mult. von reellen Zahlen durchgeführt

d.h. neutrales Element bzgl. $+$: $0 = (0, 0)$

$\cdot$: $1 = (1, 0)$

$\Rightarrow$ die Körpereigenschaften 1.–5. folgen aus denen der reellen Zahlen und mit $\forall x \in \mathbb{R}: \ (x, 0) \in \mathbb{C}$ ist $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

• Zusätzlich definieren wir noch die komplexe Konjugation $*: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z = (x, y) \Rightarrow \boxed{z^* = (x, -y) = x + i(-y)}$

• Rechenregeln mit komplexen Zahlen:

Das schöne an dieser Def. ist dass wir unter Beachtung der besonderen Rolle von "i": $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$ mit $z \in \mathbb{C}$ wie mit reellen Zahlen rechnen können:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) = x_1 x_2 + x_1 i y_2 + i y_1 x_2 + \overbrace{i y_1 i y_2}^{i^2 = -1}}$$

$$\boxed{= (x_1 x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)}$$

desgleichen mit dem inversen für $z \neq 0$

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{(x+iy)} \frac{(x-iy)}{(x-iy)} = \frac{z^*}{|z|^2}}$$

wobei $|z| \equiv \sqrt{z z^*} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2+y^2} > 0 \Rightarrow z \cdot \frac{1}{z} = 1$

den absolut Betrag definiert $= \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$ "Länge des Vektors (x,y)"

Anmerkung: Auch wenn die Identifikation von $\mathbb{C}$ mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ (Bilder sind) naheliegt, ist die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ $\quad z_1 \cdot z_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ neu.

Im Allgemeinen definieren wir in $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^4$) nur die skalare Multiplikation von Vektoren (x,y) mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot (x,y) = (\alpha x, \alpha y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

sowie das Skalarprodukt $(x,y) \cdot (u,v) = xu + yv : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(Ausnahme: das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$: $\vec{v} \times \vec{u} = \vec{w} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)

Rechnen mit komplexer Konjugation:

Durch einfaches Nachrechnen ergibt sich für + und ·

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \quad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*, \quad (z^*)^* = z,$$

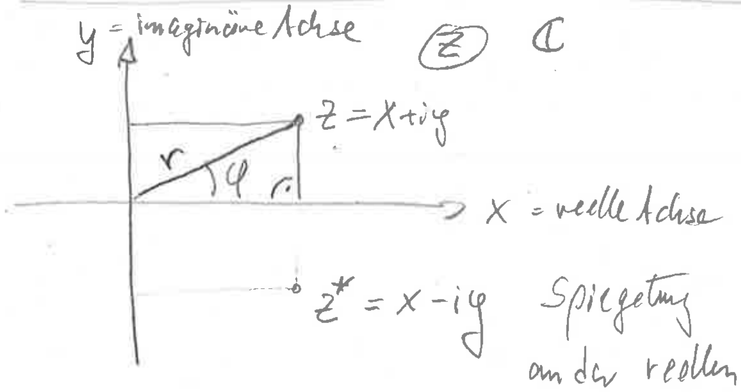
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \left(\text{aus } |z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 z_1^* z_2 z_2^*\right)$$

(was ist mit $|z_1 + z_2|$?)

sowie Real- und Imaginärteil $\quad \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

(denn $\frac{1}{i} = \frac{i^*}{|i|} = \frac{-i}{1} = -i$, $(-i)i = 1$)

- Geometrische Interpretation und Polarkoordinaten:

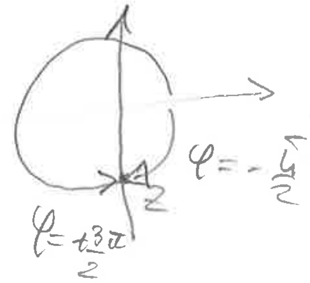


für $z \neq 0$ können wir auch schreiben $\boxed{|z| = r}$ Betrag, "Radius"

und $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\cos\varphi \end{array}\right\} z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Polarkoordinaten

• Mit $\arg(z) = \varphi$ bezeichnen wir den zu z gehörenden Winkel; dieser ist nicht eindeutig, da $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ denselben Punkt z beschreiben.



Dieser kann eindeutig gemacht werden durch die Festlegung $\boxed{\operatorname{Arg}(z) \in [-\pi, +\pi]}$

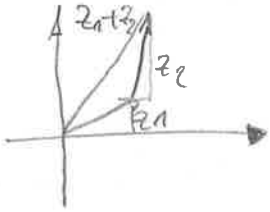
d.h. durch die Wahl $-\pi < \varphi \le \pi$

Damit ist für $z \neq 0$

$(x, y) \longleftrightarrow (r, \operatorname{Arg}(z))$ eine Bijektion zwischen Kartesischen und Polarkoordinaten

$\to$ Rechnen mit arg: $\boxed{\arg(z^*) = -\arg(z), \quad \arg(z^{-1}) \overset{S.2}{=} \arg(z^*)}$

• Addition (u. Subtraktion) — geometrische Interpretation

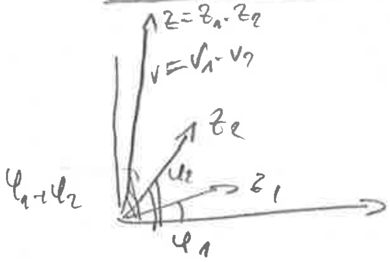


$\Rightarrow$ Dreiecksungleichung

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

"Translation", übliche Vektoraddition $\to$ Ü

• Multiplikation



in Polarkoordinaten:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

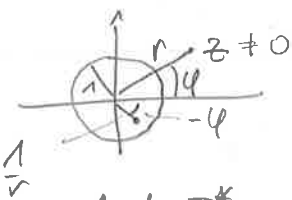
$$= r_1 r_2 \Big[\underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{\hat{=}\cos(\varphi_1+\varphi_2)} \quad \text{Additionstheorem}$$

$$+ i \underbrace{(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)}_{\hat{=}\sin(\varphi_1+\varphi_2)} \Big]$$

$$= \underbrace{r_1 r_2}_{\text{neue Länge}} \big(\cos\underbrace{(\varphi_1+\varphi_2)}_{\text{neuer Winkel}} + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$$

"= Drehstreckung" $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ $\Leftarrow$

• Inversion



$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{r(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{r^2} = \frac{\cos\varphi + i\sin(-\varphi)}{r}$$

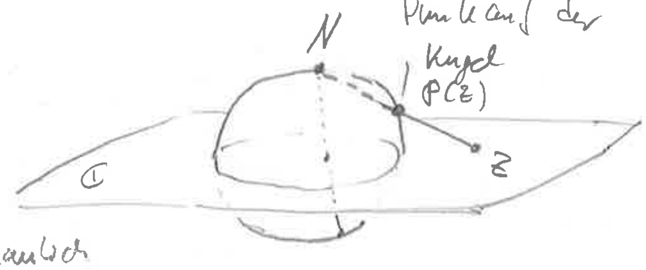
Spiegelung am Einheitskreis $r = 1$ und komplexe Konjugation

- durch Addition u. Multiplikation können wir nun beliebige Polynome $P(z)$, $Q(z)$ als Funktionen von komplexen $z \in \mathbb{C}$ bilden, sowie nach Inversion beliebige rationale Funktionen v. $z \in \mathbb{C}$

$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ für $Q(z) \neq 0$ bilden. Bsp Möbiustrafo $\frac{az+b}{cz+d}$ für $ad-cb \neq 0$

- Bevor wir zu komplizierteren Funktionen und deren Definitions- bzw. Bildraum zu gehen brauchen wir einige Begriffe.

Gebiete in der komplexen Ebene: (wichtig f. Diffbarkeit, Singularitäten)



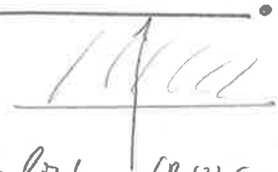
- $\mathbb{C}$ gesamte komplexe Ebene
- Hinzunahme des Punktes im unendlichen $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$: Anschaulich

durch Projektion auf die Riemannsche Zahlkugel im $\mathbb{R}^3$: $x^2+y^2+u^2=1$

$|z| \geq 1$ Projektion auf die obere Hemisphäre

≤ 1 untere ", z. B. $z=0$ auf Südpol

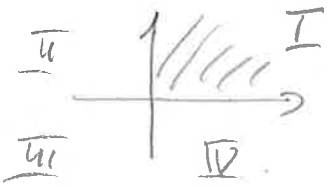
Dann entspricht der Nordpol N dem Punkt im unendlichen!

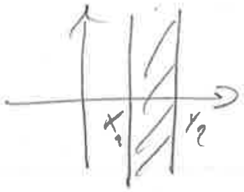


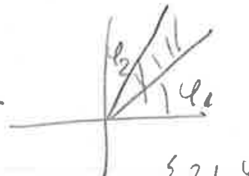
- Halbebenen: Obere " $H = \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$

entsprechend untere ($\mathrm{Im}(z)<0$), rechte ($\mathrm{Re}\, z>0$) u linke ($\mathrm{Re}(z)<0$) "

- Quadranten I: $\{z \mid \mathrm{Re}(z)>0$ und $\mathrm{Im}(z)>0\}$



- Streifen 

, Sektoren 

$\{z \mid x_1 < \mathrm{Re}(z) < x_2\}$

$\{z \mid \varphi_1 < \mathrm{Arg}(z) < \varphi_2\}$

- Kreisscheibe: $K_R(z_0) = \{z \mid |z-z_0| < R\}$

Einheitskreis mit $z_0 = 0$ und $R = 1$

Bsp für eine offene Umgebung