Theoretische Physik II: Quantenmechanik und Spezielle Relativitätstheorie

Gernot Akemann, E5-129, Tel 106-6202
akemann@physik.uni-bielefeld.de

Vorlesungen
Mo 10:15 - 11:45 H13 (14.5. in H11 !!)
Di 10:15 - 11:45 V2-205
Do 10:15 - 11:45 H5

außer an folgenden Terminen: 26.4., 1.5. (frei), 10.5. (frei), 21.5. (frei), 24.5., 31.5. (frei), 18.6., 19.6., 21.6.

4 Übungen à: Fr 8-10 C01-142 Mandy
Fr 10-12 C01-142 Dennis
Fr 10-12 U2-147 Max
~~Fr 12-14 U2-232~~
Fr 14-16 C01-142 Tim

Tutoren: Max Bense, Dennis Bollweg, Tim Würfel, Mandy Wygas

Klausurtermin: ~~27~~. 7. 10-13 H4
(14. 9. 10-13 H4 Nachklausur)

→ geprüft werden Inhalt d. Vorlesung und Übungen

Hausübungen: bestanden wenn über das Semester verteilt:
1. 50% der Punkte aus der 1. Aufgabe jedes Übungszettels
2. 50% der Aufgaben angekreuzt und mindestens 2x vorrechnen

Abgabe Hausübungen: Dienstags vor d. Vorlesung!

Übungszettel i.A. Dienstags in der Vorlesung für die Woche darauf und auf der Website: Mathematical Physics Group → teaching, dort auch Kopie meiner Vorlesungsnotizen.

Literatur: Referenzen zu Kapiteln in T. Fließbach "Quantenmechanik" und G. Münster "Quantentheorie", siehe auch Handapparat (Landau, Lifshitz, Messia I & II, Schwabl etc)

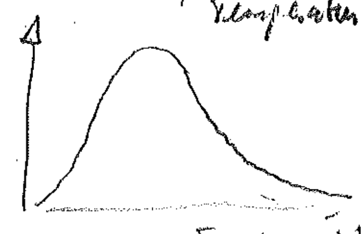
1. Wellenmechanik [T. Fliessbach Kap I.1, G. Münster 1.1]

1.1. Einführung, historische Bemerkungen und erste Konzepte

1900 – 1925 Krise der klassischen Physik (Mechanik u. Elektrodynamik) bis zur Entstehung der Quantenmechanik (QM)

1900 M. Planck: Herleitung der experimentell gut bekannten Schwarzkörperstrahlung

$$\boxed{S(\nu,T) = \frac{a\nu^3}{e^{\frac{b\nu}{T}}-1}}$$



* unter der Annahme daß Licht nur quantisiert emittiert u. absorbiert werden kann!

Energie der Quanten $\boxed{E = h\nu} = \underbrace{\frac{h}{2\pi}}_{\hbar}\underbrace{(2\pi\nu)}_{\omega}$ „Kreis-Freq."

h Planck'sches Wirkungsquantum $\approx 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js

1905 A. Einstein: erklärt den bekannten äußeren photoelektrischen Effekt damit daß Licht sich wie ein Teilchen verhält (Photon)! Unabhängig von der Intensität kann Licht nur oberhalb einer minimalen Energie $E = h\nu_{min}$ Elektronen aus einer Metalloberfläche herausschleudern

* beides steht im Widerspruch zur äußerst erfolgreichen Beschreibung u.a. von Maxwell von Licht als elektromagnetische Wellen
[→ hist. Artikel arxiv.physics/0512034, D. Giulini]

1911 E. Rutherford: Streuung von α-Teilchen an Goldfolie zeigt daß Atome einen sehr kleinen, stark lokalisierten positiv geladenen Kern besitzen

⇒ Instabilität von Materie nach klass. Physik:

Ein Elektron e^- auf einer Kreisbahn um den positiven Kern p^+ (Proton) strahlt Energie ab (beschleunigte Bahn), in Form von elektromagnet. Wellen und stürzt in den Kern ↯ Das passiert aber nicht!! (oder doch – es fliegt wieder raus)

→ 1912 N. Bohr das experimentell bekannte Spektrum des Wasserstoffatoms (H-Atom) wird durch eine bestimmte (adhoc) Quantisierung der "Bahnen" erklärt.

* Ein Ziel dieser Vorlesung: mathematische Beschreibung und physikal. Interpretation dieses Phänomens, d.h. gesucht

Differentialgleichung (Eigenwertproblem) $\boxed{H\Psi(\vec{x},t) = E\Psi(\vec{x},t)}$, H Differentialoperator (enthält Δ Laplace und Coulombpotential)

dessen Lösung $\Psi(\vec{x},t)$ das e^- des H-Atoms beschreibt, zur "Bahnenergie" E

→ wir werden finden daß es zu $E<0$ (gebundene Zustände) aber Lösungen zu diskreten Werten $E_{l=0,1,\dots}$ gibt, diese sind also quantisiert und für $E>0$ gibt es ein Kontinuum von Lösungen (ungeb. Zustände)

1924 L. de Broglie – die de Broglie Wellenlänge:

postuliert, daß nicht nur Licht Teilcheneigenschaften haben kann, sondern andere Teilchen wie e^- Welleneigenschaften.

→ für Licht gilt folgende Energie-Impuls Beziehung (Dispersionsrelation)

c Lichtgeschwindigkeit

$E = cp = c|\vec{p}|$, $\vec{p}$ Impulsvektor, Betrag $p = |\vec{p}|$

$E = h\nu$ ⟹ $\boxed{p = \frac{E}{c} = h\frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}} = \hbar k$, λ Wellenlänge $= \frac{c}{\nu}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenzahl

$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$ de Broglie Wellenlänge f. Teilchen mit Impuls $p = |\vec{p}|$

→ 1927 C.J. Davisson, L.H. Germer; G.P. Thompson

Es werden bei Streuung von e^- an Kristallen und Metallfolien Interferenzmuster beobachtet, wie bei Wellen mit λ_{e^-}

<u>Beispiel:</u> Beschleunigung von e^- aus Ruhelage mit Spannung U:

m_e Masse von e^-, Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$, Ladung e

kin. Energie $\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} m_e |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2m_e} |\vec{p}|^2} \doteq eU$
Dispersionsrel

$\Rightarrow$ deB Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm_e}}$, $\approx 1.2 \cdot 10^{-10}$ m,
$\uparrow$ für $U = 100$ V

dies entspricht weicher Röntgenstrahlung d.h. ist beobachtbar!

<u>Frage:</u> Warum können wir bei größeren Teilchen keine Wellennatur beobachten (Interferenz)? λ ist viel zu klein:

Staubkorn $m = 10^{-6}$ g, mit $v = 10 \text{ m s}^{-1}$

$\Rightarrow$ $\lambda = 6.6 \cdot 10^{-26}$ m nicht beobachtbar!

<u>Formaler Limes:</u> Der Limes $h \to 0$ "reduziert" die QM zur klass. Mechanik

(bzw. lassen sich in diesem Limes Korrekturen zum klassischen Verhalten (= semi-klass. Limes) berechnen

z.B. Hawking-Strahlung von schwarzen Löchern)

* $\exists$ Analogie zum Limes $\lambda \to 0$ in der Optik zur geometrischen,

in der keine Wellenphänomene mehr beobachtet werden.

1.2 Wellen- und Schrödingergleichung [Fließbach I.2, I.3; Münster 1.2]

* Wir suchen eine Wellengl., deren Lösung die Dispersionsrelation (E-p Beziehung) für ein freies, nichtrelativistisches Teilchen erfüllt.

Die Lsg. dieser Schrödinger gl. heißt Wellenfunktion $\psi(\vec{r},t) \in \mathbb{C}$ und beschreibt ein freies Quantenmech. Teilchen.

zur Erinnerung: 1-dimensionale Wellengleichung

$$\boxed{\partial_t^2 y(x,t) = v^2 \partial_x^2 y(x,t)}$$

partielle Differentialgl. (PDE)

• ein nützliches Werkzeug zur allgem. Lsg ist die Fouriertransformation (FT)
da diese die PDE in eine gewöhnliche Diff.gl. (ODE) umwandelt,
zur ODE gibt es Lösungsverfahren (→ Analysis I & II), zur Wdh. von FT später.

Ansatz: $\boxed{y(x,t) = a e^{i(kx-\omega t)}}$ (statt sinus, cosinus hier $e^{iz} = \cos(z) + i\sin z$ = Euler)

mit Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω

$$\Rightarrow \partial_t^2 y = (-i\omega)^2 y = -\omega^2 y; \quad \partial_x^2 y = (ik)^2 = -k^2 y$$

$$\Rightarrow -\omega^2 y(x,t) = -k^2 v^2 y(x,t)$$

d.h. $\boxed{v = \pm \frac{\omega}{k}}$ v Phasengeschwindigkeit

$$y(x,t) = a e^{ik(x-\underbrace{\frac{\omega}{k}}_{v}t)}$$

fliegt mit v von links nach rechts ω_+ (rechts " links ω_-)

In 3 Dim: $\boxed{\partial_t^2 \psi = |\vec{v}|^2 \Delta \psi(\vec{r},t)}$, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

mit $\psi(\vec{r},t) = A e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$

* die Wellengleichung ist linear, d.h. die Superposition von Lsg (= Linearkombination)