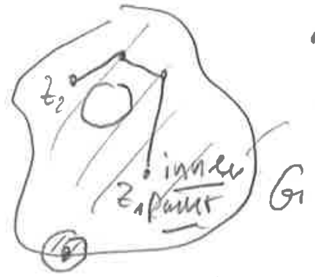
• punktierte Gebiete: $H \setminus \{z_0\}$, z.B. Kreisscheibe ohne Mittelpunkt z_0

• 

Randpunkt
$\forall K_\varepsilon$ K_ε enthält innere u. äußere Pkt

• äußerer Punkt $\exists$ Kreis um p Umdl $\subseteq \mathbb{C} \setminus G$

$\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ $K_\varepsilon \subseteq G$

G ist zusammenhängend falls je 2 $z_1, z_2 \in G$ durch ein Polygon verbunden werden können

z.B.  nicht zusammenhängend

G einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C} - G$ zusammenhängend

d.h. G oben ist nicht ~ , der Einheitskreis ist ~ (punktiert nicht!)

G offen wenn alle Punkte innere ~ (wichtig: offene Umgebung eines Punktes in G)

G abgeschlossen wenn $\mathbb{C} - G$ offen, G's Abschluß $\bar{G}$ = G + alle Randpunkte (jede Umgeb. enthält innere u. äußere Pkt.)

Innere von G $G^0 = G - (\text{— u —})$

G beschränkt wenn es $K_R(z_0)$ gibt mit $G \subseteq K_R(z_0)$

sonst unbeschränkt

G kompakt wenn G beschränkt und abgeschlossen.

I.2 Elementare Funktionen von $z \in \mathbb{C}$

- wir haben bereits gesehen, wie z's multipliziert und dividiert werden -> rationale Funktionen
- weitere Operationen: $r = |z| = \sqrt{zz^*}$, $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+z^*)$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-z^*)$

und mit $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$$\arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}\right) = \varphi$$

• Besonders "schöne" Funktionen erhalten wir wenn wir nur Funktionen von z (und nicht z und z^*) betrachten ~> Analytizität

Bsp Potenz eines Monoms $z \in \mathbb{C}$:

Theorem von De Moivre: $\boxed{z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Beweis: Induktion und $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ in Polarkoord.

Alternativ: setzen wir folgende Potenzreihen auf $\mathbb{R}$ als bekannt voraus:

$$\cos(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und $\exp(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!}$, diese konvergieren für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Einsetzen von $i\varphi$ in $\exp$ ergibt mit $i^2 = -1$

$$e^{i\varphi} = \boxed{\exp(i\varphi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \ldots = \boxed{\cos\varphi + i\sin\varphi}$$ Eulerformel

($\exp(z)$ für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ kommt später)

$\Rightarrow$ $\boxed{z = r e^{i\varphi}}$, wegen $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2}$

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{e^{-i\varphi}}{r}$ und $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

gelten die üblichen Rechenregeln für die exp Funktion:

z.B. $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ $\Rightarrow$ De Moivre ✓

— in Polarkoordinaten ist sofort klar daß $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$ $\forall \varphi \in \mathbb{R}$

- **Wurzeln von komplexen Zahlen**

Zur Erinnerung: Wurzeln von reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$

- die p-te Wurzel $\boxed{\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}}$ ist definiert für $a > 0$ und $p \in \mathbb{N}$ und liefert eine Lösung der Gleichung $\boxed{x^p = a}$

Bsp: $p = 2$, $a = 4 \Rightarrow \sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$ löst die Gl. $x^2 = 4$

ABER: diese Gl hat 2 reelle Lösungen: $x = +2$ und $x = -2$

Im Allgemeinen hat $x^p = a$ für $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{N}$
/ 1 reelle Lösung für p ungerade
\ 2 reelle Lösungen für p gerade ($\pm \sqrt[p]{a}$)

- Im komplexen gibt es mehr Lösungen:

Fundamentalsatz der Algebra:

$$\boxed{\text{Jedes Polynom } P_n(z) \text{ vom Grad } n \in \mathbb{N} \text{ hat genau } n \text{ Lösungen (Wurzeln) } z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \text{ der Gleichung } P_n(z) = 0}$$

(Beweis später)

also auch $P_p(z) = x^p - a = 0$. Bsp: $x^2 = -4$ hat keine reelle Lsg.

Wurzeln von komplexen Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$:

die n-te Wurzel $w = z^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ gibt genau n Lösungen

der Gleichung $\boxed{z = w^n}$

Im Polarkoordinaten $z = re^{i\theta}$ $w = s e^{i\varphi}$, $s, r > 0$, d.h.

es gilt $r(\cos\theta + i\sin\theta) \underset{\text{Moivre}}{\overset{\text{De}}{=}} s^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

Real- und Imaginärteil müssen unabhängig voneinander erfüllt sein (Basis)

$\Rightarrow$ $w = se^{i\varphi}$ mit

$$\boxed{\begin{aligned} & s = \sqrt[n]{r} \quad (\text{„normale" Wurzel reeller Zahlen}) \\ & \varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}}$$

(für $k = n$ sind wir wieder bei $k = 0$, Periodizität von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$)

aufgrund der Periodizität $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$, $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$

von $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$

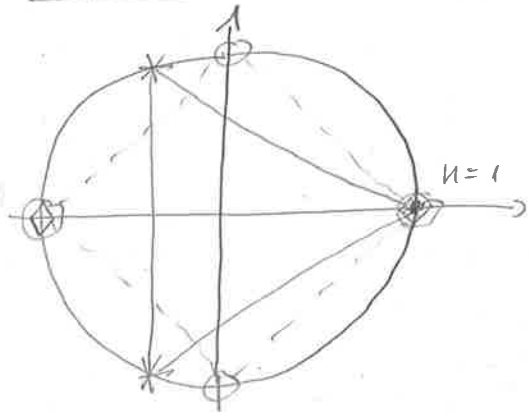
D.h. die Wurzel ist nicht eindeutig auf $\mathbb{C}$!

Ein wichtiges Beispiel: Einheitswurzeln, d.h. Lösungen der Gleichung $\boxed{w^n = 1}$ ($z = 1$, d.h. $r = 1$ und $\theta = 0$)

hat n Lösungen mit $s = 1$ ($= \sqrt[n]{r}$), alle vom Betrag 1

$w = s e^{i\varphi}$, $\boxed{\varphi = 2\pi \frac{k}{n} \text{ für } k = 0, 1, \dots, n-1}$

graphische Darstellung



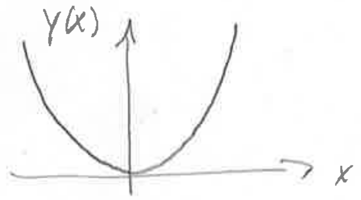
• $n=1$
◇ $n=2$
* $n=3$
○ $n=4$

gleichseitiges Polygon mit n Ecken auf dem Einheitskreis (Schwerpunkt = Ursprung $z=0$)

(w^n = n mal Dreh(streck)ung)

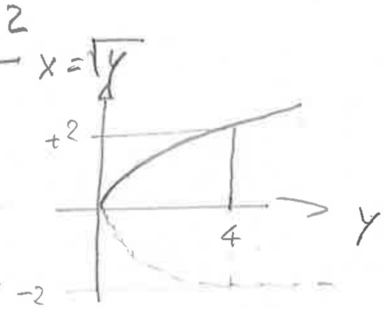
Zurück zur Eindeutigkeit: Beispiel $n = 2$

• auf $\mathbb{R}$:



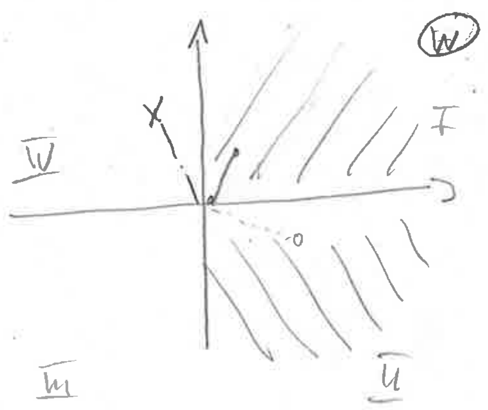
$y(x) = x^2$

Wurzel → Umkehrfunktion

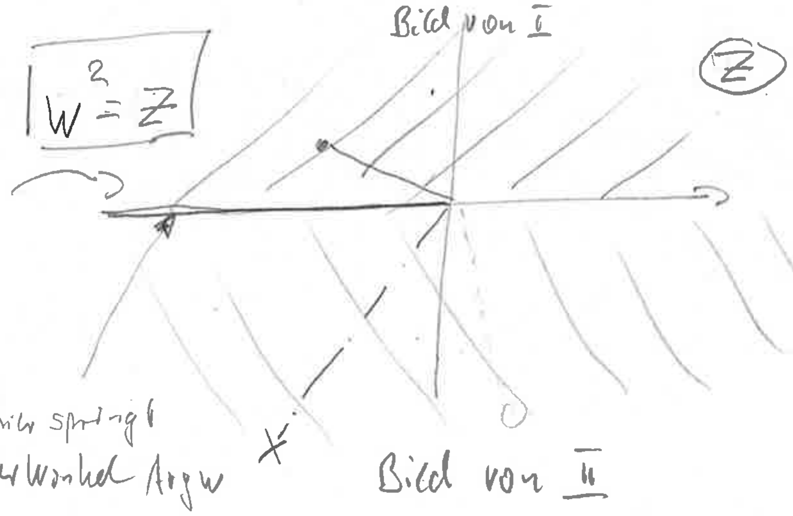


wir haben vereinbart daß $\sqrt{y} > 0$
der untere Zweig ergibt die 2. Lsg zu $x^2 = 4$: $x = -2$ (für $n=2$ sind dies alle Lösungen)

• auf $\mathbb{C}$: Multiplikation = Drehstreckung



$\boxed{w^2 = z}$



hier springt der Winkel Arg w von $+\pi$ nach $-\pi$

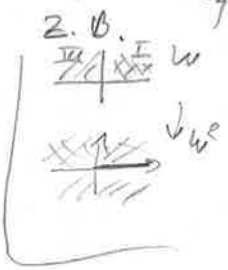
• natürlich können wir auch ein w in Quadrant IV quadrieren und landen in III (oder IV)

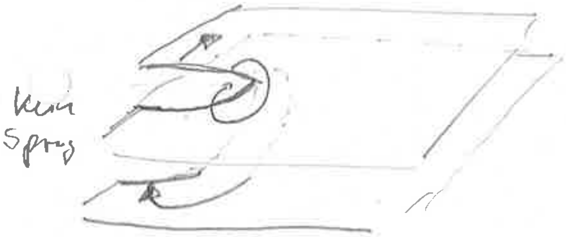
* die Funktion $w \to w^2$ ist stetig auf ganz $\mathbb{C}$

Def Eine Funktion $f(z)$ ist stetig in einer offenen Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ wenn gilt $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(\lim\limits_{z \to z_0} z) = f(z_0)$

• Es gilt daß die Summe, Differenz, Produkt und Quotient $f(z)/g(z_0)$ $g(z_0) \neq 0$ stetig ist in z_0

• Gilt dies auch für die Umkehrfunktion $w = z^{\frac{1}{n}}$, insbesondere für $\operatorname{Arg} w = \pi$? Wir können die Stetigkeit von w „retten“, indem die n verschiedenen Lösungen $w = z^{\frac{1}{n}}$ auf n verschiedenen Riemannschen Flächen leben, die untereinander verbunden (Wurzel) sind bei $\varphi = \pi$ (wo dieser Schnitt liegt ist eigentlich Konvention)





← $n=2$ Riemannsche Flächen

für $n=3$ 3 Flächen usw

„Tiefgarage wo oberstes und unterstes Deck verbunden“

zu $w^n = z = re^{i\theta}$

Hauptzweig: $\boxed{w = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}}$ $(k=0)$ $z = re^{i\theta}$

$k = 1, 2, \ldots n-1$ Nebenzweige

• $\exists$ Umkehrfunktionen mit ∞ vielen Zweigen, z.B. der Logarithmus = Umkehrfunktion der Exponentialfunktion