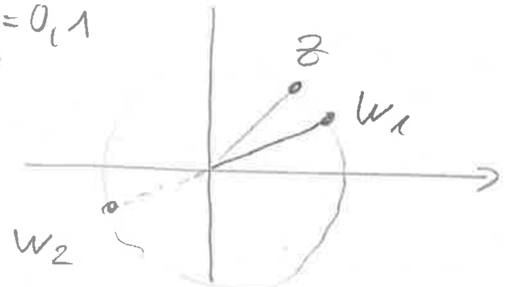
- zu jedem Punkt in der z-Ebene gibt es 2 Punkte $w_{1,2}$ auf den beiden Riemannflächen, die die Gl. $\boxed{z = w^2}$ lösen:

<u>Bsp</u> $\underline{z = e^{i\frac{\pi}{4}}} \Rightarrow w_k = e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}}$, $k = 0, 1$

$\Leftrightarrow \underline{w_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}}$ Hauptzweig

$\underline{w_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)}}$

$\arg > \pi$ Nebenzweig



- Wie schon erwähnt ist ein weiteres Bsp für eine mehrdeutige Funktion der <u>Logarithmus</u>, die Umkehrfunktion der noch zu def. <u>Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$</u>

In Polarkoordinaten $\underline{z = re^{i\varphi}}$ $\left(\overset{\varphi \text{ nicht eindeutig}}{=} re^{i(\varphi + 2\pi k)} \quad k \in \mathbb{Z}\right)$

da das Argument von z nicht eindeutig: $\arg\varphi = \underset{\in[-\pi,+\pi]}{\mathrm{Arg}\,\varphi} + 2\pi k$

$\Rightarrow \underline{\log(z)} = \log\left(re^{i\varphi}\right) = \log(r) + i\varphi \underline{= \log|z| + i\arg z}$

d.h. $\exists\ \infty$ viele Nebenzweige. Der Hauptzweig wird bezeichnet

mit $\boxed{\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)}$

die Nebenzweige $\underline{\log(z) = \log|z| + i(\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z}$ $(\neq 0)$

- Wie sich später herausstellen wird ist die <u>Exponentialfunktion</u> für beliebige $z \in \mathbb{C}$ gegeben durch $\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$, (bisher nur $z = i\varphi$)

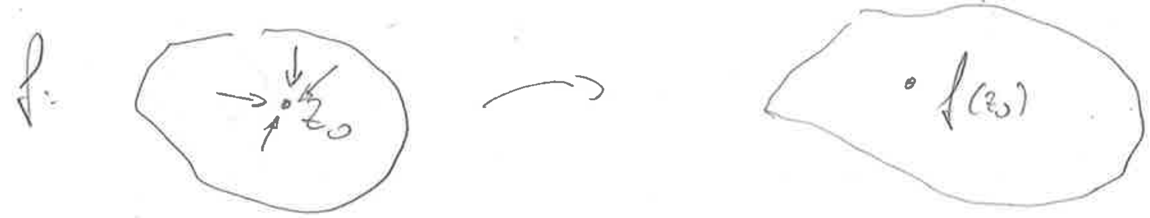
diese konvergiert überall und ist eindeutig.

I.3 Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ und Analytizität [Arfken 6.2]

Def: Sei $f(z)$ eine komplexwertige Funktion, die in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ definiert ist. Dann ist die Ableitung definiert als

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}\Big|_{z=z_0} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z_0+\delta z) - f(z_0)}{\delta z}$$ falls dieser existiert!

In diesem Fall heißt f differenzierbar (diffbar) in z_0.



Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ und Diffbarkeit dort muß hier der limes $z_0 + \delta z \to z_0$ derselbe sein, egal in welcher Richtung/weise wir ihn nehmen. Dies ist eine stärkere Einschränkung als in $\mathbb{R}$ (vgl. Richtungsableitung im $\mathbb{R}^2$ mit $\vec{\nabla}$)

Notwendige Bedingung: Sei $z_0 = x + iy$, $f(z_0) = u(x,y) + i v(x,y)$

dann muß die Ableitung in x- u. y-Richtung dieselbe sein: wähle i) $\delta z = \delta x$

ii) $\delta z = i\delta y$

$\Rightarrow$ Ableitung in x-Richtung i): $$\lim_{\delta x \to 0} \frac{u(x+\delta x, y) + i v(x+\delta x, y) - u(x,y) - i v(x,y)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(x+\delta x, y) - u(x,y)}{\delta x} + i \frac{v(x+\delta x, y) - v(x,y)}{\delta x}$$

$$\overset{\text{normale Ableitung in } \mathbb{R}^2}{=} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \qquad \left(= (1,0)\cdot(\partial_x, \partial_y) f \right)$$

genauso in y-Richtung ii) $$\lim_{\delta y \to 0} \frac{u(x, y+\delta y) + i v(x, y+\delta y) - u(x,y) - i v(x,y)}{i\,\delta y} = -i \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

$$\left(= (0,-i)(\partial_x, \partial_y) f \right)$$

d.h. $u(x,y)$ und $v(x,y)$ müssen in beiden Argumenten diffbar sein.

Damit die Ableitung von $f(z_0)$ existiert müssen beide Limites gleich sein,

d.h. $$\boxed{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}}$$

diese heißen Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (C.-R. Dgl.)

- Sind die C.-R. Dgl. auch hinreichend, damit f in z_0 komplex diffbar?

Ja, wenn alle Ableitungen $\partial_x u, \partial_y u, \partial_x v, \partial_y v$ in z_0 stetig sind (Thm)

$\boxed{\text{• Praktisch: wenn Abl. ex. dann egal in welche Richtung wir sie berechnen!}}$ z.B. $f'(z_0) = (\partial_x u + i\partial_x v)\big|_{z_0}$

Def Eine Funktion $f(z)$ heißt analytisch (oder holomorph oder regulär) in einer offenen Menge G, wenn $\forall z \in G$ die Ableitung $f'(z)$ existiert.

(Wenn $f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch heißt sie eine ganze Funktion)

Bemerkung: diffbar in z_0 ≠ analytisch, brauchen diffb auf offener Menge → ü

Hinweis: $\delta f(z) = f(z+\delta z) - f(z) = u(x+\delta x, y+\delta y) + i v(x+\delta x, y+\delta y) - u(x,y) - i v(x,y)$

$$= \delta x(\partial_x u + i\partial_x v) + \delta y(\partial_y u + i\partial_y v) + O(\delta^2)$$

Stetigkeit von $\partial_{x,y} u, v$ ⟺ Eigenschaft v $O(\delta^2)$

$$\overset{C.R.}{=} \delta x(\partial_x u + i\partial_x v) + \delta y(-\partial_x v + i\,\partial_x u) + O(\delta^2)$$

$$= \underbrace{(\delta x + i\delta y)}_{\text{allgemeines } \delta z}\,\underbrace{(\partial_x u + i\partial_x v)}_{\text{Änderung in x-Richtung}} + O(\delta^2)$$

$$\left(\overset{C.R.}{=} \delta z \cdot (\partial_y v - i\partial_y u) + O(\delta^2) = (-i)\,\delta z\,\underbrace{(\partial_y u + i\partial_y v)}_{\text{Änderung in y-Richtung}} + O(\delta^2)\right)$$

Beispiele:

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$$, u, v stetig diffb.

Funktion nur von z (ohne Wurzel, log)

$$\Rightarrow \partial_x u = 2x = \partial_y v \,,\quad \partial_y u = -2y = -\partial_x v \quad ✓$$

analytisch auf $\mathbb{C}$

dasselbe gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $f(z) = z^n$, Beweis später

Bsp

$g(z,z^*) = zz^* = |z|^2 = x^2+y^2 + i\cdot 0 \Rightarrow u(x,y) = x^2+y^2,\ v(x,y)=0$

d.h. $\partial_x u = 2x \neq \partial_y v = 0$ also nicht diffbar i.A.

$\partial_y u = 2y \neq -\partial_x v = 0$

Anwendung der C.R.-Gln: Theorem der orthogonalen Trajektorien:

Sei $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ analytisch. Dann sind in allen Punkten z mit $f'(z) \neq 0$ die Kurven beschrieben durch $u(x,y) = \text{const}$ und $v(x,y) = \text{const}$ orthogonal zueinander.

Beweis:

$d\tau$ infinitesimaler Tangentialvektor zur Kurve

$u(x,y) = \text{const} \Rightarrow 0 = du = dx\frac{\partial u}{\partial x} + dy\frac{\partial u}{\partial y} = (dx, dy)\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\partial_x u\\ \partial_y u\end{pmatrix}}_{\text{Gradient}}$

d.h. $d\tau \perp$ Gradient

- genauso für den Gradienten $\begin{pmatrix}\partial_x v\\ \partial_y v\end{pmatrix} \perp$ Tangentialvektor zu $v(x,y) = \text{const}$

d.h. die Tangentialvektoren zu den Kurven sind $\perp \Leftrightarrow$ die Gradienten $\perp$ sind: $0 \overset{!}{=} (\partial_x u, \partial_y u)\cdot\begin{pmatrix}\partial_x v\\ \partial_y v\end{pmatrix} = \partial_x u\, \partial_x v + \partial_y u\, \partial_y v$

$\overset{C.R.}{=} -\partial_x u\, \partial_y u + \partial_y u\, \partial_x u$ ✓

Beispiel: $f(z) = z^2 \to$ Ü

- Rechenregeln für analytische Funktionen

* jede konstante Funktion $f(z) = c$ ist auf $\mathbb{C}$ analytisch und hat Ableitung 0.

denn: $\lim_{\delta z\to 0}\left(\frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z}\right) = \lim_{\delta z\to 0}\frac{c-c}{\delta z} = 0$, also $f'(z) = 0$

* $f(z) = z$ ist analytisch und hat Ableitung $f'(z) = 1$

denn $\lim_{\delta z\to 0}\frac{\cancel{z}+\delta z-\cancel{z}}{\delta z} = \lim_{\delta z\to 0} 1 = 1$

* Summenregel: f, g analytisch $\Rightarrow \boxed{(f+g)'} = \lim_{\delta z\to 0}\frac{f(z+\delta z)+g(z+\delta z) - (f(z)+g(z))}{\delta z}$

$= \lim_{\delta z\to 0}\frac{f(z+\delta z)-f(z)}{\delta z} + \lim_{\delta z\to 0}\frac{g(z+\delta z)-g(z)}{\delta z} = \boxed{f'(z)+g'(z)}$