* Produktregel $(f(z)\cdot g(z))' = f'(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot g'(z)$

denn $= f(z+\delta z)\, g(z+\delta z) - f(z)\, g(z) \underbrace{- f(z)\, g(z+\delta z) + f(z)\, g(z+\delta z)}_{\text{addiere } 0}$

$= \underbrace{(f(z+\delta z) - f(z))}_{O(\delta z)}\, \underbrace{g(z+\delta z)}_{= g(z) + O(\delta z)} + f(z)\,(g(z+\delta z) - g(z))$

$\Rightarrow \lim\limits_{\delta z\to 0} \frac{1}{\delta z}(\;-\text{"}-\;) = f'(z)\, g(z) + f(z)\, g'(z) = (f(z)\cdot g(z))'$

* Quotientenregel: für $g(z) \neq 0$, $f(z), g(z)$ analytisch

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)\,g(z) - g'(z)\,f(z)}{(g(z))^2}$$

* Kettenregel: $f: G_1 \to G_2$ analytisch, $g: G_2 \to G_3$ analytisch

$\Rightarrow (f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z)$

Folgerungen: * Jedes Polynom $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0$ ist analytisch auf $\mathbb{C}$:

f. Monome $(z^n)' \underset{\text{regel}}{\overset{\text{Produkt-}}{=}} (z)' z^{n-1} + z(z^{n-1})' = 1 z^{n-1} + z(z^{n-1})'$

$\underset{\text{Induktion}}{=} (n-1) z^{n-1}$

& mittels Summenregel gilt dies auch für Polynome bel. Ordnung

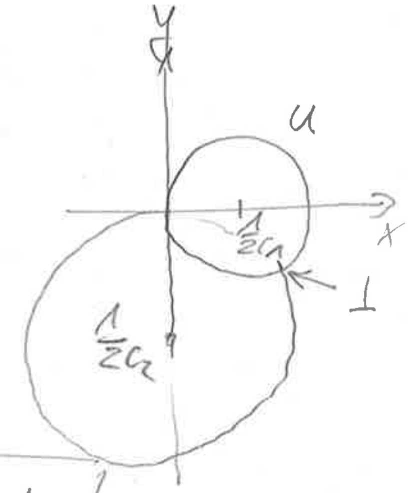
* $\Rightarrow$ Quotientenregel: jede rationale Funktion $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$

mit $Q_m(z) = b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0$ ist analytisch außerhalb der Nullstellen von $Q_m(z)$.

Beispiel $\frac{1}{z} \left(= \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)$ ist analytisch

auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (punktierte komplexe Ebene)

mit Ableitung $\left(\frac{1}{z}\right)' = \frac{-1}{z^2}$ da $f(z)=1,\ f'=0$, $g(z)=z,\ g'=1$



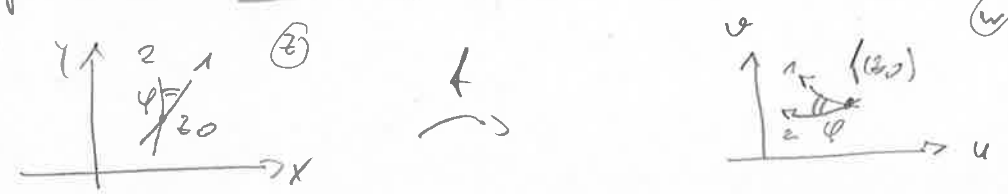
hier orthogonale Trajektorien

$u = \text{const} = c_1 \iff \frac{x}{x^2+y^2} = c_1 \iff \boxed{y^2 + \left(x - \frac{1}{2c_1}\right)^2 = \frac{1}{(2c_1)^2}}$

$v = \text{const}' = c_2 \iff \frac{-y}{x^2+y^2} = c_2 \iff \boxed{x^2 + \left(y + \frac{1}{2c_2}\right)^2 = \frac{1}{(2c_2)^2}}$

- **Geometrische Bedeutung der Analytizität**

Besondere Eigenschaft: $f(z)$ analytisch $\Rightarrow$ ist überall dort wo $f'(z) \neq 0$ winkeltreu d.h.



$f'(z_0) \neq 0$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Es gilt: $f(z_0+\delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\,\delta z + O(\delta z^2)$

also wird für kleine δz dieses abgebildet durch die lineare Abbildung $f'(z_0)\cdot\delta z$ durch Multiplikation mit $f'(z_0)$ (und Translation mit $f(z_0)$, dies ist immer winkel und sogar flächentreu)

Allgemeine lineare Trafo $\vec{x} \to \vec{x}' = A\vec{x}$, $\vec{y} \to \vec{y}' = A\vec{y}$ im $\mathbb{R}^n$

bildet den Winkel θ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ wie folgt ab:

$$\cos\Theta = \frac{\vec x\cdot\vec y}{|\vec x|\,|\vec y|} \longrightarrow \cos\Theta' = \frac{\vec x'\cdot\vec y'}{|\vec x'|\,|\vec y'|} = \frac{\vec x^T A^T A \vec y}{\sqrt{\vec x^T A^T A \vec x}\sqrt{\vec y^T A^T A \vec y}}$$

also sind z.B. Drehungen $\mathcal{O}$ mit $\mathcal{O}^T\mathcal{O} = \mathbb{1}$ winkelerhaltend, allgemeine lineare Abb aber nicht.

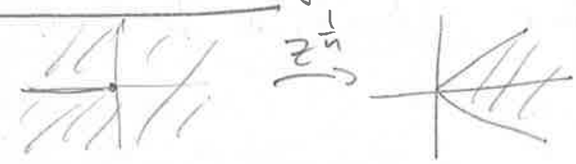
Hier: Multiplikation mit einer komplexen Zahl $f'(z_0)$ ist eine Drehstreckung, d.h. $A = \lambda\mathcal{O}$, $\lambda = |f'(z_0)|$ und $\mathcal{O}^T\mathcal{O} = \mathbb{1}$:

$$\Rightarrow \cos\Theta' = \frac{\vec x^T \lambda \mathcal{O}^T \mathcal{O}\lambda \vec y}{\sqrt{\vec x^T \lambda \underbrace{\mathcal{O}^T\mathcal{O}}_{\mathbb{1}}\lambda \vec x}\sqrt{\vec y^T \lambda \underbrace{\mathcal{O}^T\mathcal{O}}_{\mathbb{1}}\lambda \vec y}} = \cos\Theta$$ da sich λ herauskürzt.

Konsequenz: Wenn $f'(z_0) \neq 0$ gibt es eine Umgebung von $w_0 = f(z_0)$ in der die Inverse existiert f^{-1}, und wieder analytisch ist: $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$, (lineare Abb $A^{-1} = \lambda^{-1}\mathcal{O}^T$ zu $A = \lambda\mathcal{O}$)

Bsp: $w(z) = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$ Log von $\boxed{w^n = z(w)}$

$n=2$: s.S.9



$$\boxed{\frac{d}{dz} z^{\frac{1}{n}} = \frac{dw}{dz} = w(z)' = \frac{1}{z'(w)}} = \frac{1}{n w^{n-1}} = \frac{w}{n w^n} = \boxed{\frac{z^{\frac{1}{n}}}{nz} = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}}$$

Mathematische Beschreibung der Analytizität

Für $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ analytisch gilt daß beide Funktionen u und v harmonisch sind, d.h. die 2-dimensionale Laplace-Gleichung lösen

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)\, u(x,y) = \Delta u(x,y) = 0, \quad \Delta v(x,y) = 0$$

Die Funktionen u und v, die zu f analytisch gehören, heißen harmonisch konjugierte Fktn. ($\to$ Ü)

Fortsetzung: Funktionen einer komplexen Zahl: I.4 Potenz- und Laurentreihen

Def: Eine **unendliche Reihe** ist gegeben durch den formalen Ausdruck $\sum_{j=0}^{\infty} c_j = c_0 + c_1 + \ldots$, mit $c_j \in \mathbb{C}\ \forall j$. Die n-te **Partialsumme** ist $S_n = \sum_{j=0}^{n} c_j$. Wenn die Folge $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dieser einen Limes S hat, **konvergiert** die unendl. Reihe: $S = \sum_{j=0}^{\infty}$, ansonsten **divergiert** sie.

(Konvergenz ist def wie auf $\mathbb{R}$: $\{S_n\}$ hat den Limes $S = \lim_{n\to\infty} S_n$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \ |S_n - S| < \varepsilon$)

Beispiel: die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a^j = \frac{1}{1-a}$ ist für $|a| < 1$, $a \in \mathbb{C}$, konvergent und für $|a| > 1$ divergent.

Dies ist einfach zu sehen: $(1-a)S_n = (1-a)(1+a+\ldots+a^n) = 1 - a^{n+1}$, $a = re^{i\varphi}$
$\Rightarrow S_n = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} \to \frac{1}{1-a}$ wenn $\underset{\Downarrow\, r}{|a|} < 1$ da dann $a^{n+1} = \underset{\downarrow\, 0 \text{ für } n\to\infty}{r^{n+1}}\ \underbrace{e^{i(n+1)\varphi}}_{\text{beschränkt}}$

Konvergenzkriterien von Reihen (wie auf $\mathbb{R}$)

1. **Vergleichskriterium**: $\exists k: \ \forall j > k \ \ |c_j| \le m_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} m_j$ konvergiert
(oft: vgl. mit geom. Reihe) $\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} c_j$ konvergiert ebenfalls
2. **Quotientenkriterium**: Wenn der Limes $\left|\frac{c_{j+1}}{c_j}\right| \xrightarrow[j\to\infty]{} q$ existiert ist $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ konvergent für $|q| < 1$ und divergent für $|q| > 1$.

Def Eine Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ heißt **absolut konvergent** wenn $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|$ konvergiert $(\in \mathbb{R})$

Absolut konvergente Reihen können (genauso wie endliche Reihen) Term für Term addiert, multipliziert und sogar differenziert werden, wenn $c_j = c_j(z)$.
"Weierstraßscher Konvergenzsatz"