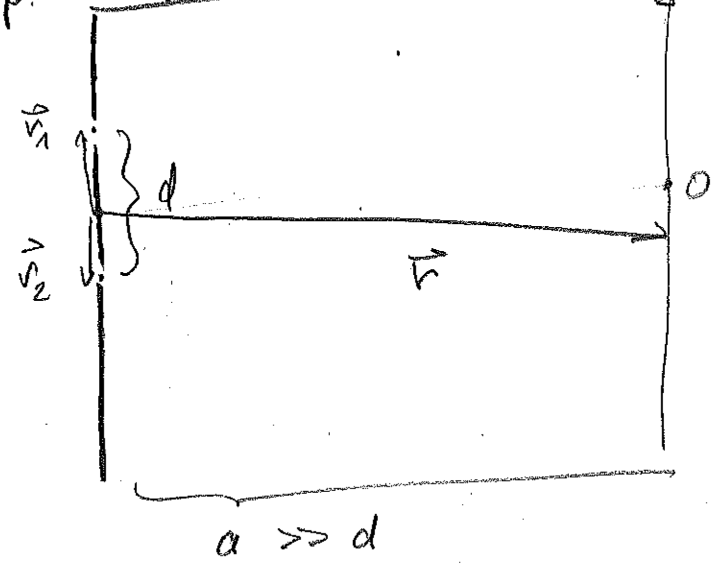
Bsp. Interferenz




$$\vec r = \begin{pmatrix} a \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec r_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \frac{d}{2} \end{pmatrix}$$

zwei Elementarwellen werden von einem Spalt mit Abstand d ausgesendet. Wie interferieren diese auf dem Schirm mit Abstand $a \gg d$?

Ansatz (wie im Huygenschen Prinzip der Zerlegung in Elementarwellen

$$\psi_j(\vec r, t) = \frac{N}{|\vec r - \vec r_j|} e^{ik|\vec r - \vec r_j| - i\omega t} \qquad j = 1,2 \qquad , \quad |e^{ix}| = 1$$

$$\Rightarrow |\psi_1 + \psi_2|^2 = (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1^* + \psi_2^*) = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1\psi_2^* + \psi_2\psi_1^*$$

$$= \frac{|N|^2}{|\vec r - \vec r_1|^2} + \frac{|N|^2}{|\vec r - \vec r_2|^2} + \frac{|N|^2}{|\vec r - \vec r_1||\vec r - \vec r_2|} \Big( \underbrace{e^{ik(|\vec r - \vec r_1| - |\vec r - \vec r_2|)} + h.c.}_{2 \cos k(|\vec r - \vec r_1| - |\vec r - \vec r_2|)} \Big)$$

$$|\vec r - \vec r_{1,2}| = \sqrt{a^2 + (z \pm \tfrac{d}{2})^2} = \sqrt{a^2 + z^2 \pm zd + \tfrac{d^2}{4}}$$

$$= a\left(1 + \frac{z^2}{a^2} \pm \frac{zd}{a^2} + \frac{d^2}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{a^2} \pm \frac{zd}{a^2} + \frac{d^2}{4a^2}\right) + O\left(\frac{1}{a^4}\right)\right)$$

$$= a + \frac{z^2}{2a} \pm \frac{zd}{2a} + \frac{d^2}{8a} + O\left(\frac{1}{a^3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad |\vec r - \vec r_1| - |\vec r - \vec r_2| = \frac{zd}{a} + O\left(\frac{1}{a^3}\right)$$

- für $|\vec r - \vec r_1|^2$, $|\vec r - \vec r_2|^2$, $|\vec r - \vec r_1||\vec r - \vec r_2|$ vernachlässige alle Terme der Ordnung $\frac{1}{a^2}$

$$\Rightarrow \quad |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = \frac{2|N|^2}{a^2} + \frac{2|N|^2}{a^2} \cos\left(k \frac{z d}{a}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{2|N|^2}{a^2}\left(1 + \cos\left(k z \frac{d}{a}\right)\right)}_{\in [0,2]}$$

$\uparrow$ $\frac{d}{a} \ll 1$ . d.h. stark oszillierend

mit $\cos = -1$ destruktive Interferenz

$= +1$ konstruktive —"—

## 1.4 Zeitunabhängige Schrödingergleichung [Münster 22, Fließbach V.10]

- die Zeitabhängigkeit von $\Psi(\vec{r},t)$ ist durch die zeitabhängige Schrödi gegeben $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = \underbrace{\left[-\frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2}{2m}+V(\vec{r})\right]}\Psi(\vec{r},t) = \underbrace{\hat{H}}_{\text{Hamilton-OP}}\Psi(\vec{r},t) = E\Psi(\vec{r},t)$

- die Raumabhängigkeit von $\Psi(\vec{r},t)$ läßt sich durch die 3D Fourier-Darstellung ausdrücken. Für freie Teilchen war die t-Abhängigkeit durch die Dispersionsrelation $\omega=\omega(\vec{k})$ gegeben.

→ was passiert, wenn $V(\vec{r})\neq 0$, d.h. das Teilchen nicht frei ist?

- betrachte Hamiltonoperatoren $\hat{H}$, die nicht explizit von t abhängen, d.h. $\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}=0$ (z.B. wie oben). „$i\omega t$"

Ansatz: $\Psi(\vec{r},t) = \int dE\, C_E\, \Psi_E(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

↑ zeitunabh. Anteil von $\Psi$

↑ E-abh. Normierungskonstante $\neq 0$
(kann dafür sorgen, daß $\int d\vec{r} \to \sum_{E\text{ diskret}}$ diskret)

$$\Rightarrow \int dE\, c_E\, \Psi_E(\vec{r})\, E\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = \int dE\, c_E\, \Psi_E(\vec{r})\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \overset{!}{=} \int dE\, C_E\, \hat{H}\Psi_E(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

$\Big|\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{+\frac{i}{\hbar}\tilde{E}t}\cdot$ auf beiden Seiten

$$\Rightarrow \int dE\, c_E\, \Psi_E(\vec{r})\, E \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{\frac{i}{\hbar}(\tilde{E}-E)t}}_{2\pi\,\delta(\tilde{E}-E)} = \int dE\, c_E \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \underset{t\text{-unabhängig}}{\hat{H}}\Psi_E(\vec{r})\, e^{\frac{i}{\hbar}(\tilde{E}-E)t}$$

gibt auch $\delta$

$\Rightarrow C_{\tilde{E}}\,\tilde{E}\,\Psi_{\tilde{E}}(\vec{r}) = C_{\tilde{E}}\hat{H}\Psi_{\tilde{E}}(\vec{r})$, d.h. $\boxed{\hat{H}\Psi_E(\vec{r}) = E\Psi_E(\vec{r})}$ da $c_{\tilde{E}}\neq 0$

Dies ist die zeitunabhängige oder stationäre Schrödi

$\Rightarrow$ die erlaubten <u>Energien $E$</u> sind die <u>Eigenwerte von $\hat{H}$</u>, alles ist <u>$t$-unabhängig!</u>

Diese $E$ sind reell wenn $V(\vec{r}) = V(\vec{r})^*$ reell ist, denn:

$$\hat{H}\psi_E(\vec{r}) = E\psi_E(\vec{r}) \Leftrightarrow \left[-\frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2}{2m} + V(\vec{r})\right]\psi_E(\vec{r}) = E\,\psi_E(\vec{r}) \quad \text{i)}\,|\psi_E^*$$

- komplex konjugiert $$\left[-\frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2}{2m} + \overset{\shortparallel}{V^*(\vec{r})}\right]\psi_E^*(\vec{r}) = E^*\psi_E^*(\vec{r}) \quad \text{ii)}\,|\psi_E$$

- <u>Differenz:</u>

$$(E-E^*)\,|\psi_E(\vec{r})|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\psi_E^*\vec{\nabla}^2\psi_E - \psi_E\vec{\nabla}^2\psi_E^*\right\}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\left\{\psi_E^*\vec{\nabla}\psi_E - (\vec{\nabla}\psi_E^*)\psi_E\right\} \left(= \hbar i\,\vec{\nabla}\vec{j}\right)$$

s. S. 10

- $\int_G d^3\vec{r}$, mit $G \to \mathbb{R}^3$, wie S. 11

$$\Rightarrow (E-E^*)\underbrace{\int d^3\vec{r}\,|\psi_E(\vec{r})|^2}_{C = \text{Const} > 0} \overset{\text{Gauß}}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{\partial G} d\vec{S}\cdot\left\{\psi_E^*\vec{\nabla}\psi_E - (\vec{\nabla}\psi_E^*)\psi_E\right\}$$

* wenn $|\psi_E(\vec{r})|^2$ integrabel ist, d.h. $\sim \frac{1}{|\vec{r}|^\alpha}$ mit $\alpha > 3$   d.h. im Limes $G \to \mathbb{R}^3$ wird rechte Seite $\to 0$

d.h. $(E-E^*)\,C = 0 \Leftrightarrow E = E^*$ reell

<u>Bemerkung:</u> es gibt $\psi_E(\vec{r})$ mit reellen $E$'s die nicht quadrat-integrierbar (sogar $\hat{H} \neq \hat{H}^\dagger$ mit $E$ reell)

* Was für Lösungen $E$ (= Spektrum) der Operator $\hat{H}$ hat hängt von $V(\vec{r})$ ab. Wie bereits für das H-Atom erwähnt kann ein und dasselbe $\hat{H}$ sowohl diskrete als auch kontinuierliche $E$ als Lösung haben.

i.A. gilt: * diskretes Spektrum = Energie Eigenwerte $E$

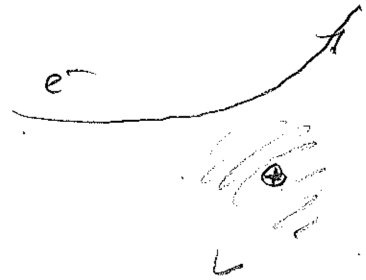
<-> entsprechen gebundenen Zuständen.

Dann ist $\Psi_E(\vec r)$ lokalisiert in der Nähe vom Minimum von $V(\vec r)$ und $\int d^3\vec r\, |\Psi_E(\vec r)|^2 < \infty$

Als Konvention wählen wir „1", d.h. die $c_E$ sind die Amplituden mit denen verschiedene ES auftauchen.

* kontinuierliches Spektrum von $E$-Eigenwerten

<-> entsprechen Streuzuständen




z.B. kann man für große Entfernungen diese als einlaufende ebene Wellen präparieren, dann verschwindet $\int d\vec S \cdot \vec j$ nicht f. $G \to \mathbb{R}^3$ und $\int_G d^3\vec r\, |\Psi_E(\vec r)| \to \infty$

- die Spektraltheorie von beschränkten und unbeschränkten $\hat H$ ist ein Teilgebiet der Mathematik.

* Wir „zeigen" nun noch, daß die $\Psi_E(\vec r)$ eine auf $\delta$ orthonormierte Basis unserer Zustände bilden:

$$\int d^3\vec r\, \Psi_E^*(\vec r)\, \Psi_{E'}(\vec r) = \delta_{E,E'} \quad \text{für } \int dE \to \sum \text{ diskret}$$

$$\int d^3\vec r\, \Psi_E^*(\vec r)\, \Psi_{E'}(\vec r) \propto \delta(E-E') \quad \text{für Kontinuum}$$

(z.B. wie ebene Wellen $\int d^3\vec r\, e^{i(\vec k - \vec k')\vec r} = (2\pi)^3\, \delta^{(3)}(\vec k - \vec k')$ )

Sei $E \neq E'$, dann gilt

$$E' \int d^3\vec{r}\, \psi_E^*(\vec{r})\, \psi_{E'}(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\, \psi_E^*(\vec{r})\, E' \psi_{E'}(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\, \psi_E^*(\vec{r})\, \hat{H} \psi_{E'}(\vec{r})$$

$$= \int d^3\vec{r}\, \psi_E^*(\vec{r}) \left[ -\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \psi_{E'}(\vec{r})$$

wenn die Randterme verschwinden können wir 2x partiell integrieren (d.h. $\cancel{\exists}$ Vorzeichen)

$$= \int d^3\vec{r} \left[ \left( -\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} \psi_E^*(\vec{r}) \right) \psi_{E'}(\vec{r}) + \psi_E^*(\vec{r}) V(\vec{r})\, \psi_{E'}(\vec{r}) \right]$$

$$= \int d^3\vec{r} \left( \hat{H} \psi_E^*(\vec{r}) \right) \psi_{E'}(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\, E \psi_E^*(\vec{r}) \psi_{E'}(\vec{r})$$

d.h. $\underbrace{(E'-E)}_{\neq 0} \underbrace{\int d^3\vec{r}\, \psi_E^*(\vec{r})\, \psi_{E'}(\vec{r})}_{= \text{Skalarprodukt von } \psi_E^* \text{ und } \psi_{E'} \text{ d.h. sind } \perp} = 0$

ON Basis

$\Rightarrow$ Volle Lösung $\psi(\vec{r},t) = \int dE\, C_E\, \psi_E(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$

$\uparrow$ $\vec{r}$ und $t$-unabh.

für $t$-unabh. $\hat{H}$

der zeitabhängigen Schrödingergl. mit WW